

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΕΠΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΣΕ ΣΤΡΩΤΗ ΡΟΗ

Δημήτριος Γ. Κουμπογιάννης¹, Ιωάννης Μπόνης²

¹Αναπληρωτής Καθηγητής (dkoubog@uniwa.gr), Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών, Σχολή Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής, Πανεπιστημιούπολη 1, Αγίου Σπυρίδωνος, 14310, Αργάεω, Αθήνα

²Εξωτερικός Συνεργάτης-Ερευνητής (ibonis@helpe.gr)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η έρευνα σχετικά με τη μείωση της έντασης του φαινομένου εκπομπής δινών αναφέρεται σε μεθόδους ενεργού ή παθητικού ελέγχου του. Μία από τις προτεινόμενες τεχνικές ενεργού ελέγχου αφορά τη χρήση περιστρεφόμενου κυλίνδρου ώστε, με μεταβολή της ταχύτητας περιστροφής, να επιτυγχάνεται έλεγχος του ομόρρου του. Στοχεύοντας στην ανάπτυξη τέτοιας μεθοδολογίας ελέγχου, στην παρούσα εργασία αναπτύσσεται ένα προσεγγιστικό μοντέλο χαμηλής τάξης για την αναπαράσταση της χρονικής εξέλιξης των δυνάμεων που ασκούνται στον κύλινδρο, το οποίο βασίζεται σε αποτελέσματα λεπτομερούς μοντέλου CFD. Εκμεταλλευόμενο την περιοδικότητα της ροής γύρω από (ακίνητο ή περιστρεφόμενο) κύλινδρο, το προτεινόμενο μοντέλο βασίζεται σε FFT μετασχηματισμό των δυνάμεων και διατήρηση μικρού πλήθους N όρων του. Διερευνάται η επιλογή της ελάχιστης απαιτούμενης τιμής N και το μοντέλο εφαρμόζεται για την αναπαράσταση του συντελεστή αντίστασης. Το μοντέλο γίνεται παραμετρικό, επιλύοντας το πρόβλημα με το CFD μοντέλο για διάφορες τιμές του αριθμού Reynolds (Re) γύρω από ακίνητο κύλινδρο και καταγράφοντας τις τιμές των συντελεστών FFT και τις αντίστοιχες συχνότητες σε βάση δεδομένων ως συνάρτηση του Re . Αξιολογείται η χρήση του παραμετρικού μοντέλου, μέσω του υπολογισμού της κατανομής του συντελεστή αντίστασης σε ροή αριθμού Re που δεν περιέχεται στη βάση δεδομένων και σύγκρισης του αποτελέσματος με αυτό του λεπτομερούς μοντέλου CFD.

Λέξεις Κλειδιά: Προσεγγιστικό μοντέλο, FFT, CFD, εκπομπή δινών.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Φαινόμενα εκπομπής δινών (vortex shedding) λαμβάνουν χώρα στη φύση και στην τεχνολογία, ιδιαίτερα γύρω από σώματα μεγάλης μετωπικής επιφάνειας (bluff bodies) και μπορούν δυνητικά να προκαλέσουν την καταστροφή μιας κατασκευής, λόγω των ταλαντώσεων που επάγει η αποκόλληση της ροής από την ακμή πρόσπτωσής της. Κατά συνέπεια, η έρευνα σχετικά με την αποφυγή ή έστω τη μείωση της έντασης του φαινομένου εκπομπής δινών είναι σημαντική και αφορά πλήθος εφαρμογών (υψηλά κτίρια, γέφυρες πολύ μεγάλου μήκους, κτλ). Για παράδειγμα, οι κάθετοι πυλώνες επιμηκών γεφυρών ή οι καθ' ύψος ακμές υψηλών κτιρίων υπόκεινται σε καταπονήσεις κόπωσης λόγω της επίδρασης του ανέμου σε αυτές και είναι δυνατό, λόγω των ιδιοσυχνοτήτων τους, να υποστούν επαγόμενες από τον άνεμο ταλαντώσεις σε πολύ μικρότερες ταχύτητες ανέμου από αυτές του σχεδιασμού τους (Kubo, 2004). Η έρευνα σχετικά με την ελαχιστοποίηση του εν λόγω φαινομένου αφορά σε μεθόδους είτε ενεργού είτε παθητικού ελέγχου του. Μία από τις προτεινόμενες στη βιβλιογραφία τεχνικές ενεργού ελέγχου, αναφέρεται στην τοποθέτηση περιστρεφόμενου κυλίνδρου ανάντι της κατασκευής, οπότε με κατάλληλη ρύθμιση της ταχύτητας περιστροφής του κυλίνδρου επιτυγχάνεται έλεγχος του ομόρρου του και κατάλληλη τροποποίηση του πεδίου ροής γύρω από την κατασκευή (Kubo, 2004).

Με απώτερο στόχο την ανάπτυξη μιας τέτοιας μεθοδολογίας ελέγχου του ομόρρου στρεφόμενου κυλίνδρου μέσω του ελέγχου της ταχύτητας περιστροφής του, απαιτείται ένα μοντέλο περιγραφής του πεδίου ροής γύρω από αυτόν και των δυνάμεων που αναπτύσσονται σε αυτόν. Ένα τέτοιο μοντέλο μπορεί να είναι είτε λεπτομερές (detailed model), ακριβές ως προς τη λύση του αλλά ακριβό υπολογιστικά, είτε χαμηλής τάξης (reduced order model), προσεγγιστικό ως προς τη λύση του αλλά φθηνό υπολογιστικά. Το χαμηλής τάξης μοντέλο βασίζεται είτε στην απλοποίηση του φυσικού προβλήματος και διατύπωση απλούστερων εξισώσεων είτε σε κατάλληλους μαθηματικούς χειρισμούς των εξισώσεων που διέπουν το υπό εξέταση φαινόμενο.

Στο παρελθόν οι συγγραφείς έχουν αναπτύξει μοντέλο χαμηλής τάξης που βασίζεται στη μεθοδολογία της Κατάλληλης Ορθογωνικής Αποδόμησης (Proper Orthogonal Decomposition-POD, Liang et al, 2002) του πεδίου ταχύτητας, τόσο για την περίπτωση ακίνητου κυλίνδρου (Bonis et al, 2013), όσο και για την περίπτωση περιστρεφόμενου κυλίνδρου (Κουμπογιάννης et al, 2014). Σύμφωνα με τη μεθοδολογία POD, η ταχύτητα αναπαρίσταται μέσω γραμμικού συνδυασμού χωρικών συναρτήσεων πολλαπλασιασμένων με χρονικούς συντελεστές.

Στην εργασία (Bonis et al, 2015), η εκπομπή δινών σε στρωτή ροή γύρω από κύλινδρο, η οποία «αποτυπώνεται» στη χρονική εξέλιξη του συντελεστή άνωσης του κυλίνδρου, διατυπώθηκε ως πρόβλημα δυναμικής βελτιστοποίησης. Ο κύλινδρος είχε δυνατότητα περιστροφής και ως μεταβλητή ελέγχου θεωρήθηκε η γωνιακή του ταχύτητα. Στόχος ήταν η ελάττωση του φαινομένου εκπομπής δινών, μέσω της ελαχιστοποίησης της διακύμανσης του συντελεστή άνωσης του κυλίνδρου γύρω από τη μέση τιμή του, που αποτελεί την αντικειμενική συνάρτηση για τη βελτιστοποίηση. Για τις αριθμητικές προσομοιώσεις χρησιμοποιήθηκε λεπτομερές μοντέλο CFD. Λόγω της περιοδικότητας του φαινομένου, η γωνιακή ταχύτητα θεωρήθηκε ότι ακολουθεί περιοδικό νόμο μεταβολής, με βαθμούς ελευθερίας που αποτελούν τις μεταβλητές ελέγχου και οι τιμές τους αναζητήθηκαν ως λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης. Με την προσέγγιση αυτή, η χρονική εξέλιξη του βέλτιστου νόμου για τη γωνιακή ταχύτητα δεν υπολογιζόταν συγχρόνως με την χρονική εξέλιξη της ροής, αλλά εκ των υστέρων (off-line). Οι λύσεις που προέκυψαν φάνηκε να οδηγούν σε αποδοτικό έλεγχο του φαινομένου.

Σε αντίθεση με το μοντέλο POD της εργασίας (Bonis et al, 2013), στην παρούσα εργασία και με την παρούσα μεθοδολογία δεν μοντελοποιείται το πλήρες πεδίο ροής, παρά μόνον οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο, στη μορφή των αδιάστατων συντελεστών άνωσης και αντίστασης. Για το σκοπό αυτό προτείνεται ένα προσεγγιστικό μοντέλο υπολογισμού των παραπάνω δυνάμεων, με σκοπό τη βοηθητική του χρήση σε εφαρμογές ελέγχου της ροής. Το μοντέλο κατασκευάζεται από δεδομένα που προκύπτουν από λεπτομερές CFD μοντέλο. Ως λεπτομερές μοντέλο χρησιμοποιείται εμπορικό λογισμικό Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (Computational Fluid Dynamics-CFD) που επιλύει τις εξισώσεις Navier-Stokes. Από τέτοιο μοντέλο μπορούν να εξαχθούν τόσο το πλήρες πεδίο ροής όσο και οι χρονικά μεταβαλλόμενες δυνάμεις επί του κυλίνδρου. Η χρονική εξέλιξη της ροής γύρω από κύλινδρο, τόσο ακίνητο όσο και περιστρεφόμενο, εμφανίζει σε πολλές περιπτώσεις περιοδικότητα, αν και έχει διαφορετική συμπεριφορά στην κάθε περίπτωση (Πάσχος, 2017). Έτσι, δεδομένης της περιοδικότητας που εμφανίζει η χρονική μεταβολή των υπό εξέταση δυνάμεων, προσφέρεται η ανάλυσή τους σε σειρά Fourier. Το προτεινόμενο προσεγγιστικό μοντέλο βασίζεται στο μετασχηματισμό FFT (Fast Fourier Transform) των δυνάμεων. Αρχικά επιλύεται το πρόβλημα για διάφορες τιμές του αριθμού Reynolds (Re) για ακίνητο κύλινδρο και αποκτώνται αντίστοιχου πλήθους χρονικές κατανομές του συντελεστή άνωσης. Μέσω εφαρμογής μετασχηματισμού FFT και σχετικής διερεύνησης επιλέγεται το απαιτούμενο πλήθος N των όρων Fourier που θα διατηρεί το μοντέλο με στόχο την επαρκούς ακρίβειας αναπαράσταση του συντελεστή της δύναμης (άνωσης ή αντίστασης). Οι τιμές των συντελεστών FFT καταγράφονται σε βάση δεδομένων ως συνάρτηση του αριθμού Reynolds (Re). Επιχειρείται ο υπολογισμός των αντίστοιχων συντελεστών και άρα της αντίστοιχης κατανομής του συντελεστή για τιμές Re' που δεν περιέχονται στη βάση δεδομένων, με σκοπό την περιγραφή της χρονικής εξέλιξης της δύναμης στον κύλινδρο χωρίς την εκ νέου πραγματοποίηση της χρονοβόρου επίλυσης με το πλήρες μοντέλο. Ο συντελεστής δύναμης που προκύπτει από την επίλυση με το χαμηλής τάξης μοντέλο συγκρίνεται με την αντίστοιχη του λεπτομερούς μοντέλου και αξιολογείται συνολικά η όλη προσέγγιση.

2. ΠΛΗΡΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΕΚΠΟΜΠΗΣ ΔΙΝΩΝ

Το υπό μελέτη πρόβλημα για την αριθμητική προσομοίωση ροής ασυμπίεστου ρευστού πυκνότητας ρ γύρω από δισδιάστατο κύλινδρο διαμέτρου D , αριθμού Reynolds (Re) στην περιοχή $40 < Re < 150$. Στην περίπτωση αυτή η ροή είναι στρωτή, μη-μόνιμη και χαρακτηρίζεται από περιοδική εκπομπή δινών. Οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα είναι η εξίσωση της συνέχειας (διατήρηση μάζας) και η εξίσωση Navier-Stokes (εξίσωση ορμής), οι οποίες σε αδιάστατοποιημένη μορφή (χρησιμοποιώντας ως ταχύτητα αναφοράς αυτή της εισόδου) γράφονται:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2)$$

Οι συνοριακές συνθήκες για τις παραπάνω εξισώσεις είναι $\mathbf{u} = (1, 0)$ στο σύνορο Γ_1 (είσοδος), $p = 0$

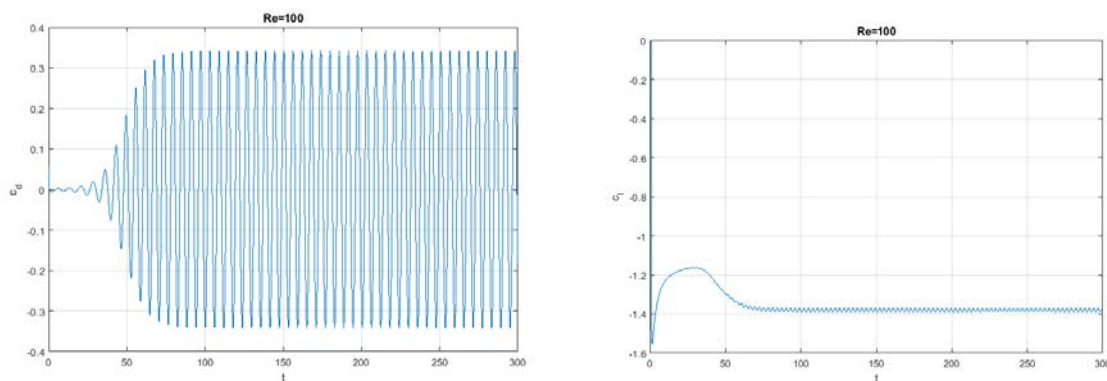
στο Γ_3 (έξοδος), $\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$, $u_y = 0$ στα Γ_2, Γ_4 (πάνω, κάτω σύνορα) και $\mathbf{u} \cdot (-\hat{n}_y, \hat{n}_x) = 1$, $\mathbf{u} \cdot \hat{n} = 0$ στο Γ_c

(κύλινδρος, $\hat{n} = (-\hat{n}_y, \hat{n}_x)$ = κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα σε αυτήν), ενώ οι αρχικές συνθήκες είναι $\mathbf{u} = 0$.

Ως λεπτομερές μοντέλο επίλυσης χρησιμοποιήθηκε το εμπορικό λογισμικό CFD COMSOL (2008). Οι εξισώσεις διακριτοποιήθηκαν στο χώρο με χρήση πεπερασμένων στοιχείων Lagrange P^2 - P^1 . Η διακριτοποίηση του χωρίου ροής, έγινε μέσω υπολογιστικού πλέγματος που αποτελείται από 4528 τριγωνικά στοιχεία με 20766 βαθμούς ελευθερίας. Η εξωτερική περίμετρος του πλέγματος έχει σχήμα ορθογωνίου, με τις πλευρές του ανάντι του κυλίνδρου, πάνω και κάτω από αυτόν απέχουν $10D$ από το κέντρο του κυλίνδρου, ενώ το κατάντι σύνορο απέχει $15D$, όπου D είναι η διάμετρος του κυλίνδρου. Οι συντελεστές άνωσης και αντίστασης υπολογίστηκαν ως $C_L = 2F_y$, $C_D = 2F_x$, μέσω της x - και της y -συνιστώσας της δύναμης επί του κυλίνδρου

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y) = \oint_{\Gamma_c} \left(p \hat{n} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3)$$

Στο Σχήμα 1 εικονίζεται η χρονική εξέλιξη των δύο παραπάνω συντελεστών για ροή με $Re=100$. Στην εργασία των Bonis et al (2013), το εν λόγω πρόβλημα επιλύθηκε και πιστοποιήθηκε ως προς αποτελέσματα της βιβλιογραφίας (Graham et al, 1999). Με βάση το Σχήμα 1, κάποιο χρόνο από την έναρξη της επίλυσης από αρχικά ακίνητο πεδίο αποκαθίσταται περιοδικότητα στο φαινόμενο, ο συντελεστής άνωσης λαμβάνει μηδενική μέση τιμή και ο συντελεστής αντίστασης μη μηδενική.



Σχήμα 1. Χρονική εξέλιξη συντελεστών άνωσης (αριστερά) και αντίστασης (δεξιά) για $Re=100$.

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΧΑΜΗΛΗΣ ΤΑΞΗΣ

3.1 FFT ανάλυση των συντελεστών άνωσης και αντίστασης

Αξιοποιώντας το γεγονός ότι η χρονική εξέλιξη των συντελεστών άνωσης και αντίστασης στην υπό μελέτη περιοχή ροών ($40 < Re < 150$) παρουσιάζει περιοδικότητα (λόγω της περιοδικής εκπομπής δινών), προσφέρεται για ανάλυση σε σειρά Fourier. Ειδικότερα, αναφερόμαστε στην χρονική εξέλιξη της συνάρτησης $x(t)$ (του αδιάστατου συντελεστή δύναμης επί του κυλίνδρου $c_L(t)$ ή $c_D(t)$), για την οποία είναι διαθέσιμη η ακριβής λύση από το λεπτομερές μοντέλο (CFD). Λαμβάνοντας ένα δείγμα

τέτοιων διακριτών τιμών που καλύπτει χρονική διάρκεια T θεωρούμε το μετασχηματισμό τους κατά FFT (Fast Fourier Transform) που γράφεται

$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{N_{\max}} \{b_m \cos(2\pi mft) + c_m \sin(2\pi mft)\} \quad (1)$$

όπου οι συντελεστές δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ b_m &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi mft) dt \\ c_m &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(2\pi mft) dt \end{aligned} \quad (2)$$

όπου $f=1/T$ είναι η μικρότερη συχνότητα (θεμελιώδης) που μπορεί να εμφανιστεί στην αναπαράσταση και T αντίστοιχα, η μεγαλύτερη περίοδος όρου κυματικής μορφής $b_m \cos(2\pi mft) + c_m \sin(2\pi mft)$. Ουσιαστικά, στην παραπάνω σχέση (1), η τιμή της συνάρτησης $x(t)$ σε κάθε χρονική στιγμή υπολογίζεται από την υπέρθεση πλήθους N_{\max} όρων διαφόρων συχνοτήτων και αντίστοιχου πλάτους στη μέση τιμή της a_0 . Το χαμηλής τάξης προσεγγιστικό μοντέλο βασίζεται αρχικά στην αναδιάταξη των όρων της σειράς (1) ώστε στην φασματική ανάλυση της συνάρτησης $x(t)$ να εμφανίζονται πρώτοι οι όροι $b_m \cos(2\pi mft) + c_m \sin(2\pi mft)$ εκείνων των συχνοτήτων f_m για τις οποίες το πλάτος ταλάντωσης $\sqrt{b_m^2 + c_m^2}$ έχει τις υψηλότερες τιμές και στη συνέχεια, στην διατήρηση πεπερασμένου πλήθους όρων (N πρώτοι όροι, $N \leq N_{\max}$), δηλαδή

$$\tilde{x}_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N \{b_n \cos(2\pi f_n t) + c_n \sin(2\pi f_n t)\} \quad (3)$$

όπου $f_1 = \frac{1}{T_1}$ είναι η κυρίαρχη συχνότητα και T_1 η κυρίαρχη περίοδος, αφού ο αντίστοιχος όρος

$b_1 \cos(2\pi f_1 t) + c_1 \sin(2\pi f_1 t)$ συμβάλει στο άθροισμα με το μεγαλύτερο πλάτος $\sqrt{b_1^2 + c_1^2}$.

3.2 Αλγόριθμος κατασκευής προσεγγιστικού μοντέλου για σταθερό Re

Έστω $x(t)$ η χρονική εξέλιξη του αδιάστατου συντελεστή δύναμης (άνωσης ή αντίστασης) που αντιστοιχεί σε ροή δεδομένου αριθμού Re, για την οποία πρόκειται να κατασκευαστεί προσεγγιστικό μοντέλο. Τα βήματα που ακολουθούνται είναι:

- (B1) *Χρήση λεπτομερούς μοντέλου:* Πραγματοποιείται αριθμητική προσομοίωση με το πλήρες μοντέλο (CFD) για τη ροή που αντιστοιχεί στον εν λόγω αριθμό Re.
- (B2) *Επιλογή δείγματος τιμών:* Από τη χρονική εξέλιξη των αποτελεσμάτων και σε χρόνο τέτοιο ώστε να έχει αποκατασταθεί περιοδικότητα, αποθηκεύεται σε διακριτό χρόνο ένα σύνολο τιμών (δείγμα) του συντελεστή $x_i = x(t_i)$ $i=1, \dots, M_s$, δηλαδή πλήθους M_s που απέχουν χρονικά μεταξύ τους Δt_s (χρόνος δειγματοληψίας) και καλύπτουν χρονική διάρκεια του φαινομένου $t_{M_s} = (M_s - 1)\Delta t_s$.
- (B3) *Εύρεση της θεμελιώδους συχνότητας:* Πραγματοποιείται φασματική ανάλυση FFT στο δείγμα τιμών $\{x_i\}$, $i=1, \dots, M_s$ και από τον πρώτο όρο εκτιμάται η κυρίαρχη συχνότητα f και από αυτήν η κυρίαρχη περίοδος T .
- (B4) *Εύρεση συνόλου τιμών εκπαίδευσης του προσεγγιστικού μοντέλου:* Για την εκπαίδευση του προσεγγιστικού μοντέλου, από το αρχικό δείγμα λαμβάνεται χρονική διάρκεια που να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της θεμελιώδους περιόδου, έστω $k_p T$, η οποία αντιστοιχεί σε χρονική διάρκεια $t_M = k_p T$ και περιλαμβάνει διακριτό πλήθος όρων $M = (t_M / \Delta t_s) + 1$ (σύνολο τιμών εκπαίδευσης).
- (B5) *FFT του συνόλου τιμών εκπαίδευσης:* Πραγματοποιείται FFT στο σύνολο τιμών εκπαίδευσης και υπολογίζονται N_{\max} όροι της σειράς (2) ($N_{\max} \leq M$), δηλαδή ο συντελεστής a_0 , οι συντελεστές b_i, c_i και οι αντίστοιχες συχνότητες f_i , $i=1, \dots, N_{\max}$.

(B6) *Εύρεση του πλήθους όρων N για το προσεγγιστικό μοντέλο:* Για διάφορες τιμές του N ($N=1, \dots, N_{\max}$) υπολογίζεται από την (2) η τιμή \tilde{x}_i , $i=1, \dots, M$ και στη συνέχεια το σφάλμα

$$E_N = \frac{1}{\Delta x_{\max}} \sqrt{\sum_{i=1}^M (\tilde{x}_{N,i} - x_i)^2}$$

που εκφράζει μέτρο της απόκλισης των τιμών του προσεγγιστικού μοντέλου από το CFD μοντέλο για το σύνολο των M τιμών του δείγματος εκπαίδευσης, σταθμισμένο με τη μέγιστη διαφορά (πλάτος) Δx_{\max} της συνάρτησης στο δείγμα εκπαίδευσης (αντί π.χ. για τη μέση τιμή a_0 η οποία π.χ. για το συντελεστή άνωσης είναι μηδενική). Το σφάλμα συγκρίνεται με προκαθορισμένη τιμή κατωφλίου (threshold) ε . Η μέγιστη τιμή του N, για την οποία $E_N \leq \varepsilon$ αποτελεί το απαιτούμενο πλήθος όρων του προσεγγιστικού μοντέλου για τον εν λόγω Re και αποθηκεύονται οι τιμές $a_0, b_i, c_i, i=1, \dots, N$. (Η τιμή του N_{\max} , δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από το πλήθος των σημείων που αντιστοιχούν στο χρόνο δειγματοληψίας t_M).

3.3 Επέκταση προσεγγιστικού μοντέλου ως προς την παράμετρο Re

Προκειμένου το προσεγγιστικό μοντέλο να επεκταθεί και να μπορεί να εκτιμά τη χρονική εξέλιξη του συντελεστή $\tilde{x}_N(t)$ για διάφορες τιμές του αριθμού Reynolds, απαιτείται να φτιαχθεί βάση δεδομένων που να περιλαμβάνει τους συντελεστές που προλέγει ο παραπάνω αλγόριθμος για κάποιες τιμές του Re. Στόχος είναι να ελεγχθεί αν το προσεγγιστικό μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για εκτίμηση και σε τιμές εκτός αυτών που περιλαμβάνονται στην βάση δεδομένων. Για το σκοπό αυτό απαιτείται διακριτοποίηση του διαστήματος μεταβολής του Re ($60 \leq Re \leq 140$ στην περιοχή ροών που εστιάζει η παρούσα εργασία), δηλαδή η διακριτοποίηση του χωρίου $D_{Re}=[60,140]$ σε κάποιες διακριτές τιμές $Re_k, k=1, \dots, k_{\max}$. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία της προηγούμενης υποενότητας για το σύνολο των τιμών $\{Re_k\}, k=1, \dots, k_{\max}$, το προσεγγιστικό μοντέλο που ουσιαστικά «αποθηκεύεται» στη βάση δεδομένων γράφεται πλέον

$$\tilde{x}_N(Re_k; t) = a_0(Re_k) + \sum_{n=1}^N \{b_n(Re_k) \cos[2\pi f_n(Re_k)t] + c_n(Re_k) \sin[2\pi f_n(Re_k)t]\} \quad (4)$$

Αντίστοιχα, θα μπορούσε να δοκιμαστεί επέκταση του προσεγγιστικού μοντέλου και ως προς δεύτερη παράμετρο, αυτή της σταθερής γραμμικής ταχύτητας περιστροφής U_D του κυλίνδρου ($U_D = \omega_c D/2$, ω_c η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κυλίνδρου) που εκφράζεται συνήθως ως ποσοστό της ταχύτητας της ροής γ ($\gamma = U_D/U$) του κυλίνδρου στην περιοχή 0-5 ($0 \leq \gamma \leq 5$) (Πάσχος, 2017). Στην περίπτωση αυτή θα απαιτούνταν η διακριτοποίηση και του χωρίου $D_\gamma=[0,5]$ σε κάποιες τιμές στις οποίες θα βασιζόταν η κατασκευή του μοντέλου. Ουσιαστικά, σε μια τέτοια περίπτωση, θα γινόταν η διακριτοποίηση του χωρίου $D_{Re} \times D_\gamma = [60,140] \times [0,5]$ σε ένα πλέγμα τιμών Re και γ , στις οποίες θα βασιζόταν η κατασκευή του μοντέλου, το οποίο γι' αυτές θα επαληθευόταν. Η «περιγραφή» της νέα βάσης δεδομένων θα γραφόταν συμβολικά

$$\tilde{x}_N(Re, \gamma; t) = a_0(Re, \gamma) + \sum_{n=1}^N \{b_n(Re, \gamma) \cos[2\pi f_n(Re, \gamma)t] + c_n(Re, \gamma) \sin[2\pi f_n(Re, \gamma)t]\} \quad (5)$$

Το ερώτημα και πάλι θα ήταν ο έλεγχος της δυνατότητας και της ικανότητα πρόλεξης της χρονικής εξέλιξης $\tilde{x}_N(Re', \gamma'; t)$ για τιμές Re' και γ' που δεν περιλαμβάνονται στην βάση δεδομένων.

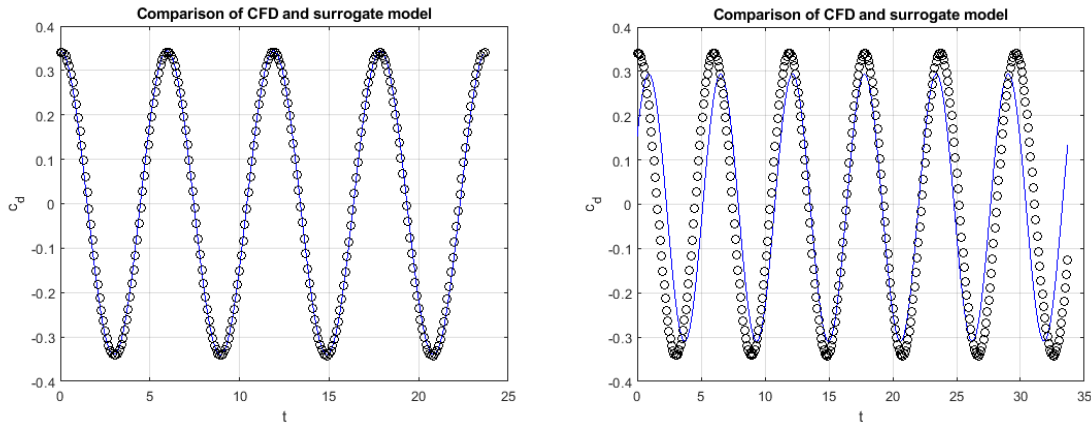
4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

4.1 Αποτελέσματα για τους συντελεστές άνωσης και αντίστασης για $Re=100$

Στην υποενότητα αυτή παρουσιάζονται αποτελέσματα της εφαρμογής και πιστοποίησης του αλγορίθμου της υποενότητας 3.2 για τον προσεγγιστικό υπολογισμό των συντελεστών άνωσης και αντίστασης. Ο αλγόριθμος εφαρμόστηκε για διάφορους αριθμούς Reynolds στο διάστημα 60-140 και με αριθμητικά πειράματα προέκυψε ότι στην περίπτωση του συντελεστή άνωσης απαιτούνται $N=8$ όροι της σειράς Fourier, ενώ στην περίπτωση του συντελεστή αντίστασης απαιτούνται $N=4$ όροι για τιμή κατωφλίου $\varepsilon=10^{-3}$.

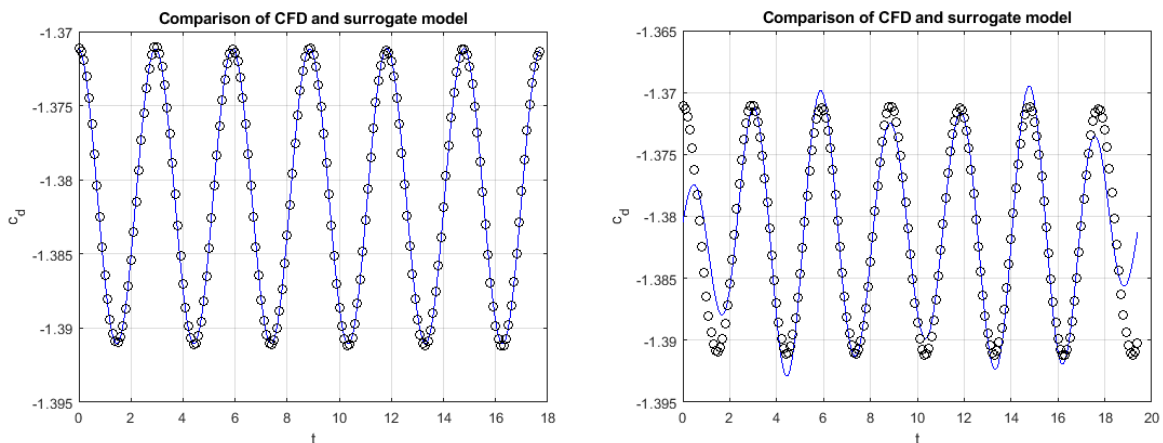
Αποτελέσματα από την εφαρμογή του αλγορίθμου παρουσιάζονται αρχικά για την περίπτωση του συντελεστή άνωσης στην περίπτωση ροής γύρω από ακίνητο κύλινδρο με $Re=100$. Στο Σχήμα 2 παρουσιάζεται η σύγκριση της χρονικής εξέλιξης του συντελεστή άνωσης μεταξύ του προσεγγιστικού

και του πλήρους μοντέλου (CFD) στο σύνολο των τιμών εκπαίδευσης. Στην περίπτωση που το σύνολο τιμών εκπαίδευσης καλύπτει χρόνο που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της κυρίαρχης περιόδου η σύγκριση είναι άριστη (Σχήμα 2, αριστερά). Στην περίπτωση όμως που το σύνολο τιμών εκπαίδευσης καλύπτει χρόνο που δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της κυρίαρχης περιόδου οι δύο κατανομές αποκλίνουν σημαντικά (Σχήμα 2, δεξιά), κάτι που οφείλεται στις ιδιότητες της ανάλυσης Fourier.



Σχήμα 2. Σύγκριση της χρονικής εξέλιξης του συντελεστή άωσης μεταξύ του προσεγγιστικού (για $N=8$ όρους) και του πλήρους μοντέλου (CFD) στο σύνολο τιμών εκπαίδευσης για ροή με $Re=100$, όταν το σύνολο τιμών εκπαίδευσης καλύπτει χρόνο που είναι (αριστερά) και όταν δεν είναι (δεξιά) ακέραιο πολλαπλάσιο της κυρίαρχης περιόδου.

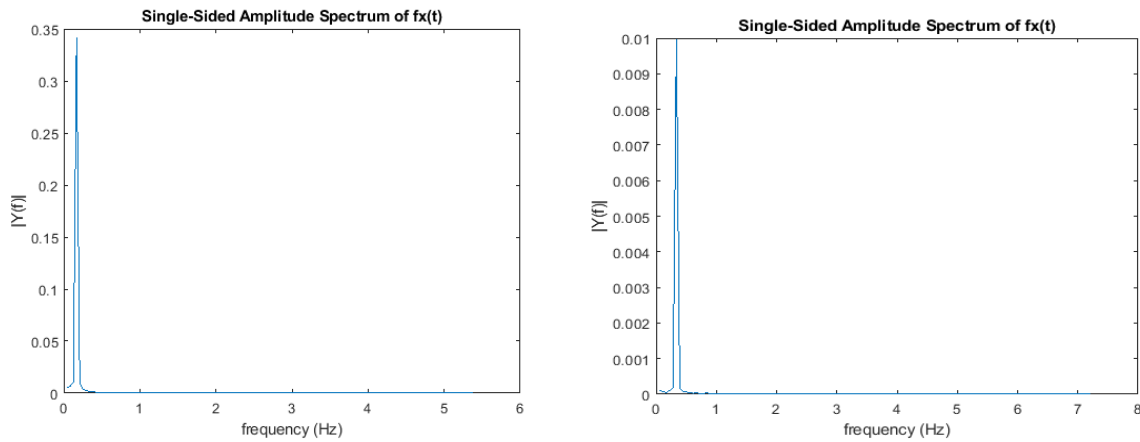
Στο Σχήμα 3 παρουσιάζεται η σύγκριση της χρονικής εξέλιξης των αντίστοιχων αποτελεσμάτων για τον συντελεστή αντίστασης μεταξύ του προσεγγιστικού και του πλήρους μοντέλου (CFD) στο σύνολο των τιμών εκπαίδευσης. Οι παρατηρήσεις είναι αντίστοιχες με αυτές της περίπτωσης του συντελεστή άωσης και του Σχήματος 2.



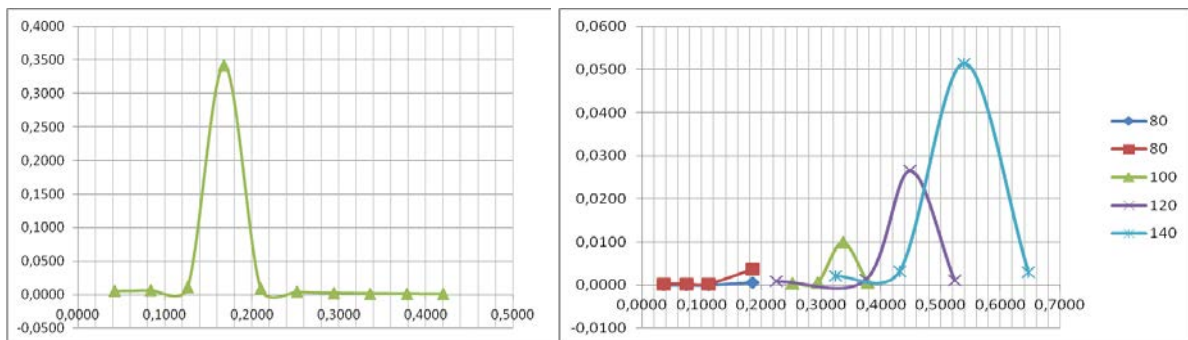
Σχήμα 3. Σύγκριση της χρονικής εξέλιξης του συντελεστή αντίστασης μεταξύ του προσεγγιστικού (για $N=4$ όρους) και του πλήρους μοντέλου (CFD) στο σύνολο τιμών εκπαίδευσης για ροή με $Re=100$, όταν το σύνολο τιμών εκπαίδευσης καλύπτει χρόνο που είναι (αριστερά) και όταν δεν είναι (δεξιά) ακέραιο πολλαπλάσιο της κυρίαρχης περιόδου.

Στο Σχήμα 4 παρουσιάζεται η φασματική ανάλυση των συντελεστών άωσης και αντίστασης, όπως προέκυψαν από επεξεργασία του δείγματος τιμών του πλήρους μοντέλου CFD. Από αυτά φαίνεται ότι και για τους δύο συντελεστές οι σημαντικοί όροι συγκεντρώνονται σε ένα «στενό» φάσμα συχνοτήτων, γεγονός που συμβαδίζει με το ότι λίγοι όροι αρκούν για την προσεγγιστική αναπαράσταση των δυνάμεων στο χρόνο. Στο Σχήμα 5 (αριστερά) παρουσιάζεται η φασματική ανάλυση του συντελεστή άωσης, όπως προκύπτει από το μικρό πλήθος όρων ($N=8$) του προσεγγιστικού μοντέλου, η οποία είναι συμβατή με την αντίστοιχη του Σχήματος 4. Στο Σχήμα 5

(δεξιά) εικονίζεται το αντίστοιχο φάσμα του συντελεστή αντίστασης για διάφορες τιμές του αριθμού Reynolds (για $N=4$). Η καμπύλη του $Re=100$ είναι και πάλι συμβατή με την αντίστοιχη του Σχήματος 4 (δεξιά).



Σχήμα 4. Φασματική ανάλυση του συντελεστή άνωσης (αριστερά) και του συντελεστή αντίστασης (δεξιά) για ροή με $Re=100$ από επεξεργασία του δείγματος τιμών του πλήρους μοντέλου CFD (οριζόντιος άξονας: συχνότητα, κατακόρυφος: πλάτος).



Σχήμα 5. Αριστερά: Φασματική ανάλυση του συντελεστή άνωσης για ροή με $Re=100$ με βάση το προσεγγιστικό μοντέλο. Δεξιά: Φασματική ανάλυση του συντελεστή αντίστασης για διάφορες τιμές του αριθμού Reynolds με βάση το προσεγγιστικό μοντέλο (οριζόντιος άξονας: συχνότητα, κατακόρυφος: πλάτος).

4.2 Αποτελέσματα για το συντελεστή αντίστασης για διάφορες τιμές Re

Στην υποενότητα αυτή παρουσιάζονται αποτελέσματα της επέκτασης του προσεγγιστικού μοντέλου όπως αυτή περιγράφεται στην υποενότητα 3.3 και αφορά στον υπολογισμό του συντελεστή αντίστασης, στην περίπτωση ροής γύρω από ακίνητο κύλινδρο για διάφορες τιμές του αριθμού Reynolds στην περιοχή ενδιαφέροντος. Ειδικότερα, ο αλγόριθμος της υποενότητας 3.2 εφαρμόστηκε για τις ακόλουθες τιμές του αριθμού Re : 60, 80, 100, 120, 140. Σε όλες τις περιπτώσεις διατηρήθηκε το πλήθος όρων $N=4$ που αναφέρθηκε παραπάνω.

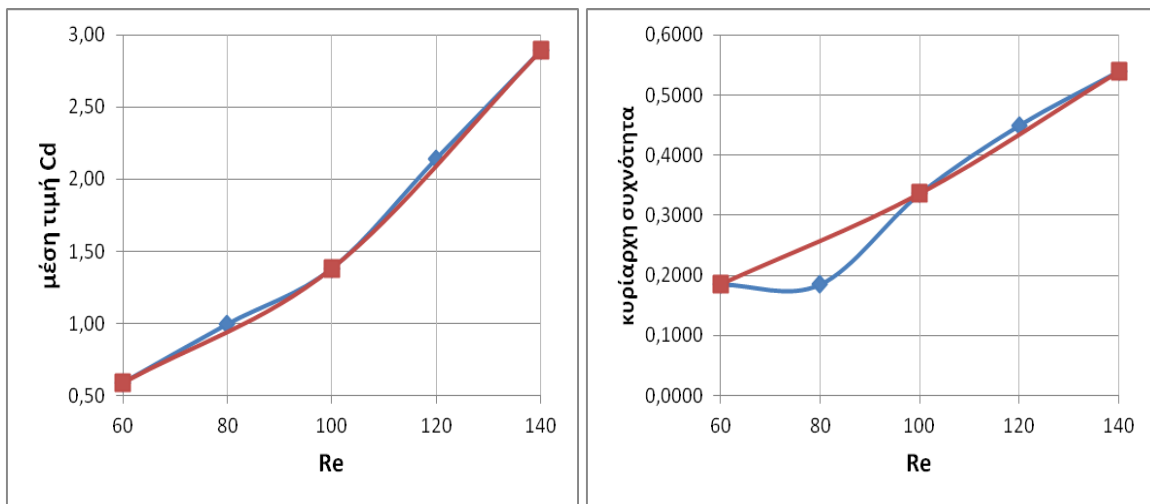
Από το Σχήμα 5 (δεξιά) φαίνεται ότι με την αύξηση του Re , αυξάνεται το πλάτος του φαινομένου εκπομπής δινών και συμμετέχουν περισσότερες συχνότητες στη διαμόρφωση της κατανομής του συντελεστή αντίστασης (1 όρος για $Re=40, 60$ και 4 όροι για $Re=100, 120, 140$). Επιπλέον, το φάσμα δείχνει να μετατοπίζεται σε υψηλότερες συχνότητες (μικρότερες περιόδους). Δηλαδή με την αύξηση του Re , το φαινόμενο της εκπομπής δινών γίνεται πιο έντονο (συχνότερο και μεγαλύτερου πλάτους).

Στο Σχήμα 6 (αριστερά) παρουσιάζεται η (μη-μηδενική) μέση τιμή αντίστασης ως συνάρτηση του αριθμού Reynolds της ροής. Η τιμή αυτή είναι αύξουσα συνάρτηση του Re . Η μεταβολή της είναι περίπου γραμμική, με διαφορετική κλίση στα διαστήματα 40-100 (πιο ήπια) και 100-140 (πιο απότομη). Στο Σχήμα παρουσιάζονται δύο καμπύλες, η μία αφορά τις 3 (ισαπέχουσες) τιμές Re 60, 100, 140, ενώ η δεύτερη τις 5 (επίσης ισαπέχουσες) τιμές Re 60, 80, 100, 120, 140. Δηλαδή, η δεύτερη καμπύλη αφορά πιο «πυκνή» διακριτοποίηση του πεδίου μεταβολής Re . Είτε 3 είτε 5 τιμές

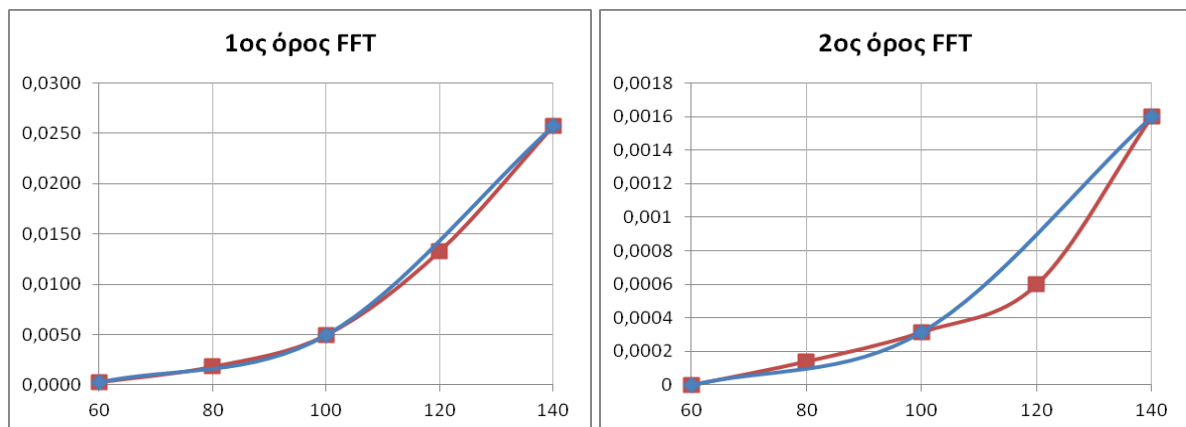
χρησιμοποιηθούν δε φαίνεται να είναι σημαντικές ποιοτικά οι διαφοροποιήσεις ως προς την συμπεριφορά των καμπυλών.

Αντίστοιχα, στο Σχήμα 6 (δεξιά) παρουσιάζεται η κυρίαρχη συχνότητα της FFT ανάλυσης του συντελεστή αντίστασης ως συνάρτηση του Re . Η συχνότητα είναι γενικά αύξουσα συνάρτηση του Re όπως και η μέση τιμή. Η μεταβολή της όμως στην καμπύλη των 5 σημείων δεν είναι γραμμική στο διάστημα 40-100, ενώ στο διάστημα 100-140 είναι περίπου γραμμική. Αντίθετα, η καμπύλη των 3 σημείων δεν δίνει επαρκείς βαθμούς ελευθερίας για την ανάδειξη ποιοτικών χαρακτηριστικών της μεταβολής και δείχνει παντού γραμμική.

Στο Σχήμα 7 παρουσιάζεται η μεταβολή του πλάτους του πρώτου (αριστερά) και του δεύτερου όρου (δεξιά) της σειράς Fourier ως συνάρτηση του Re . Και οι δύο όροι αυξάνουν με την αύξηση του Re . Ο πρώτος όρος αυξάνει περίπου 2,5% και ο δεύτερος περίπου 0,16% μεταξύ των δύο άκρων του διαστήματος Re . Ο τρόπος μεταβολής είναι περίπου παραβολικός (καμπύλη δεύτερης τάξης). Οι καμπύλες των 3 και των 5 σημείων δείχνουν αντίστοιχη συμπεριφορά στον πρώτο (και σημαντικότερο ποσοτικά) συντελεστή, ενώ εμφανίζουν αποκλίσεις στον δεύτερο (αλλά λιγότερο σημαντικό ποσοτικά).



Σχήμα 6. Μέση τιμή συντελεστή αντίστασης (αριστερά) και κυρίαρχη συχνότητα (δεξιά) ως συνάρτηση του αριθμού Reynolds της ροής.



Σχήμα 7. Πλάτος πρώτου όρου (αριστερά) και δεύτερου όρου (δεξιά) του προσεγγιστικού μοντέλου για την αντίσταση ως συνάρτηση του αριθμού Reynolds της ροής.

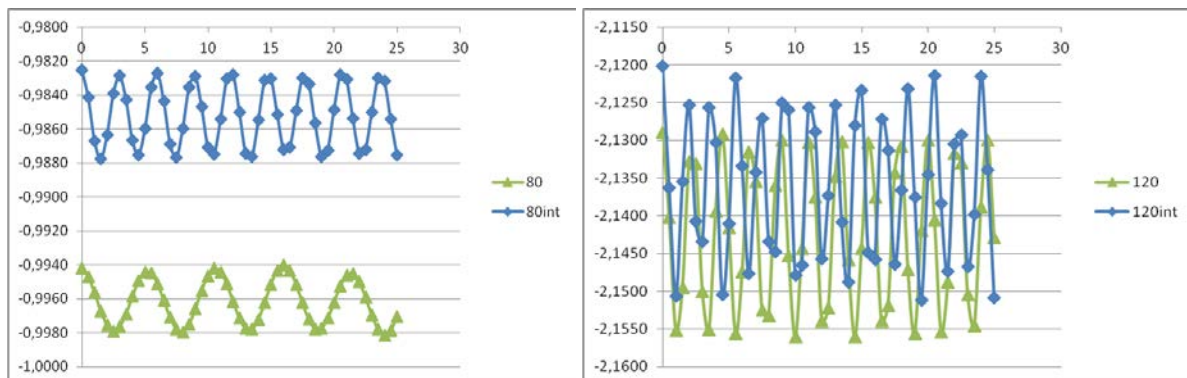
5. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΡΟΗΣ ΜΕ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ

Στην ενότητα αυτή γίνεται μελέτη του κατά πόσο το παραμετρικό ως προς Re προσεγγιστικό μοντέλο $\tilde{x}_N(Re;t)$ (με βάση το συμβολισμό της σχέσης (4)) μπορεί να προλέξει την χρονική εξέλιξη του συντελεστή αντίστασης για ροή αριθμού Re που δεν περιλαμβάνεται στη βάση δεδομένων του. Για το σκοπό αυτό θεωρείται ότι το προσεγγιστικό μοντέλο έχει δημιουργηθεί με βάση δεδομένων 3 αριθμών

Re (60, 100, 140), έστω $B\Delta_3$. Επιχειρείται με γραμμική παρεμβολή η προσομοίωση για Re=80 (έστω $\tilde{x}_{4,int}(80;t)$ το αποτέλεσμα της), ως εξής: $\tilde{x}_{4,int}(80;t) = [\tilde{x}_4(60;t) + \tilde{x}_4(100;t)]/2$. Η κατανομή αυτή συγκρίνεται με την αντίστοιχη του προσεγγιστικού μοντέλου Re=80 της βάσης δεδομένων 5 αριθμών Re ($B\Delta_5$), δηλαδή αυτή που προλέγει το μοντέλο που έχει εκπαιδευθεί για Re=80 ($\tilde{x}_4(80;t)$). Η δεύτερη είναι το αποτέλεσμα του προσεγγιστικού μοντέλου που έχει αποθηκευτεί στην $B\Delta_5$ και είναι υψηλής ακρίβειας, πάρα πολύ κοντά σε αυτή του πλήρους μοντέλου CFD.

Στο Σχήμα 8 (αριστερά) εικονίζεται η σύγκριση των δύο κατανομών $\tilde{x}_{4,int}(80;t)$ και $\tilde{x}_4(80;t)$. Ας σημειωθεί ότι έχει γίνει εστίαση στον κάθετο άξονα στην περιοχή των υπό σύγκριση τιμών. Σε αντίστοιχη «μακρινή» εικόνα, όπου το εύρος τιμών του κάθετου άξονα θα ήταν από 0 ως -1,6, το αποτέλεσμα δείχνει πολύ ικανοποιητικό. Η εστίαση στις συγκρινόμενες κατανομές (Σχήμα 8, δεξιά), δείχνει ότι η μέση τιμή τους είναι διαφορετική, με μικρή όμως απόκλιση (περίπου 1,1%). Αντίθετα, σημαντικότερη δείχνει η απόκλιση στην κυρίαρχη περίοδο του φαινομένου. Το γεγονός της απόκλισης στη συχνότητα εξηγείται αν παρατηρήσει κανείς στο Σχήμα 6 (δεξιά) ότι στο διάστημα Re 60-100 η κυρίαρχη συχνότητα δε μεταβάλλεται γραμμικά.

Αντίστοιχη σύγκριση, μεταξύ των $\tilde{x}_{4,int}(120;t)$ και $\tilde{x}_4(120;t)$, επιχειρήθηκε και για την τιμή Re=120 στο διάστημα Re 100-140. Η $\tilde{x}_{4,int}(120;t)$ εκτιμάται και πάλι από γραμμική παρεμβολή των αποτελεσμάτων του μοντέλου για Re=100 και Re=140, σύμφωνα με τη σχέση $\tilde{x}_{4,int}(120;t) = [\tilde{x}_4(100;t) + \tilde{x}_4(140;t)]/2$. Η $\tilde{x}_4(120;t)$ είναι το αποτέλεσμα του προσεγγιστικού μοντέλου που έχει αποθηκευτεί στην $B\Delta_5$ και είναι πολύ κοντά σε αυτή του πλήρους μοντέλου CFD. Η απόκλιση της μέσης τιμής του συντελεστή αντίστασης είναι περίπου 0,3% (μικρότερη από πριν), αλλά και η σύγκριση των κυρίαρχων συχνοτήτων είναι πολύ πιο ικανοποιητική από πριν, κάτι που αποδίδεται στο γεγονός ότι στο Σχήμα 6 (δεξιά), στο διάστημα Re 100-140 η συχνότητα δείχνει να μεταβάλλεται περίπου γραμμικά.



Σχήμα 8. Σύγκριση των $\tilde{x}_{4,int}(80;t)$ και $\tilde{x}_4(80;t)$ (αριστερά) και των $\tilde{x}_{4,int}(120;t)$ και $\tilde{x}_4(120;t)$ (δεξιά).

Τυχόν επανάληψη αντίστοιχης σύγκρισης για Re=70 με γραμμική παρεμβολή των Re=60 και Re=80 της $B\Delta_5$ αναμένεται να δώσει καλύτερα αποτελέσματα από αυτά που παρουσιάστηκαν παραπάνω για Re=80. Γενικότερα, πυκνότερη διακριτοποίηση του διαστήματος D_{Re} του αριθμού Reynolds και εμπλουτισμός της βάσης δεδομένων (π.χ. χρήση $B\Delta_{10}$) προφανώς και θα βελτιώνει τα αποτελέσματα της σύγκρισης. Ένα ερώτημα θα ήταν ποια η ελάχιστη τιμή του πλήθους P, ώστε με χρήση βάσης δεδομένων $B\Delta_P$ η γραμμική παρεμβολή να δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα στο παραπάνω πρόβλημα. Ένα δεύτερο, πιο ουσιαστικό και «αυστηρό μαθηματικά» ερώτημα θα ήταν το πώς θα ήταν «σωστότερο» να γίνει παρεμβολή μεταξύ δύο σειρών Fourier (π.χ. ίσως χρειάζεται να διατηρηθούν όλες οι συμμετέχουσες συχνότητες με πλάτη που θα εκτιμώνται από πολυωνυμική παρεμβολή μεταξύ όλων των συντελεστών της βάσης δεδομένων για όλους τους Re και όχι απλά γραμμική παρεμβολή ανάμεσα στις άμεσα γειτονικές τιμές του προσεγγιστικού μοντέλου).

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Η παρούσα εργασία παρουσίασε την δημιουργία ενός προσεγγιστικού μοντέλου για τη γρήγορη εκτίμηση της χρονικής κατανομής των δυνάμεων επί ακίνητου κυλίνδρου, σε στρωτές ροές με

εκπομπή δινών. Εκμεταλλευόμενο τον περιοδικό χαρακτήρα της ροής, το προσεγγιστικό μοντέλο βασίζεται στην FFT φασματική ανάλυση συνόλου δείγματος διακριτών ακριβών τιμών της υπό μελέτη συνάρτησης. Οι ακριβείς τιμές προέκυψαν από πλήρες μοντέλο, το οποίο στη συγκεκριμένη περίπτωση ήταν λογισμικό CFD. Περιγράφηκε ο αλγόριθμος δημιουργίας του προσεγγιστικού μοντέλου και αξιολογήθηκε επιτυχώς μέσω σύγκρισης με το πλήρες.

Επιπλέον, προτάθηκε η παραμετρική επέκτασή του ως προς τον αριθμό Reynolds της ροής και, στην περίπτωση περιστρεφόμενου κυλίνδρου και ως προς την ταχύτητα περιστροφής του. Η επέκταση ως προς τον αριθμό Reynolds δοκιμάστηκε στοιχειωδώς, προσομοιώνοντας με το πλήρες μοντέλο το συντελεστή αντίστασης για κάποιους αριθμούς Re, σχολιάζοντας την εξάρτηση του προσεγγιστικού μοντέλου από αυτόν και επιχειρώντας μοντελοποίηση σε αριθμό Re για τον οποίο το μοντέλο δεν έχει εκπαιδευθεί, μέσω απλής γραμμικής παρεμβολής. Τα αποτελέσματα είναι ενθαρρυντικά, επιδέχονται όμως περαιτέρω διερεύνηση και βελτίωση.

Συνέχιση της παρούσας έρευνας αφορά στη βελτίωση του μοντέλου, την ταυτόχρονη εξέταση της συμπεριφοράς του στην πρόλεξη των συντελεστών άνωσης και αντίστασης και την επέκτασή του σε περιστρεφόμενους κύλινδρους, αρχικά για σταθερή ταχύτητα περιστροφής και στη συνέχεια για χρονικά μεταβαλλόμενη. Τέλος, αν η μεθοδολογία αποδειχθεί επιτυχής, θα απαιτηθεί εξέταση της επέκτασής της σε άλλες περιοχές αριθμών Reynolds για την ίδια γεωμετρία (π.χ. τυρβώδης εκπομπή δινών), καθώς και η μελέτη του τρόπου ένταξης και συμβολής της σε μεθοδολογία ελέγχου ροής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Allgöwer F. and Zhen A., Nonlinear model predictive control, Progress in systems and control theory 26, Springer, 2000.

Bonis I., Sarimveis H. and Koubogiannis D.G., Proper Orthogonal Decomposition-based reduced order modeling of vortex shedding, Proceedings of the 5th International Conference on Experiments/Process/System Modeling/Simulation/Optimization 5th IC-EpsMsO, Athens 03-05 July 2013.

Bonis I., Sarimveis H. and Koubogiannis D.G., Optimal Control of Vortex Shedding using Detailed Models, Proceedings of the 8th GRACM International Congress on Computational Mechanics, Volos, 12–15 July, 2015, Greece.

Kubo Y. (2004), Prospects for the suppression of aerodynamic vibrations of a long-span bridge using boundary-layer control, J. Vibration and Control, 10, p. 1359.

Κουμπογιάννης Δ.Γ., Σαρίμβεης Χ., Μπόνης Ι., Ανάπτυξη Μοντέλου Μειωμένης Τάξης για την Αριθμητική Προσομοίωση Στρωτής Ροής γύρω από Περιστρεφόμενο Κύλινδρο, 9^ο Πανελλήνιο Συνέδριο «Φαινόμενα Ροής Ρευστών» (POH 2014), 12-13 Δεκεμβρίου 2014, ΕΜΠ, Αθήνα.

Graham W.R., Peraire J. and Tang K.Y. (1999), Optimal control of vortex shedding using low-order models. Part I-Open-loop model development, Int. J. for Num. Methods in Engineering 44(7), p 945.

COMSOL AB, *Multiphysics, COMSOL User's Guide, version 3.5a, 2008.*

Πάσχος Ι., Αριθμητική Προσομοίωση στρωτών ροών γύρω από κύλινδρο, Πτυχιακή εργασία, Τμήμα Μηχανικών Ενεργειακής Τεχνολογίας, Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών, ΤΕΙ Αθήνας, Αθήνα, Μάρτιος 2017.