

ΡΟΗ ΒΙΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ ΣΕ ΠΑΘΟΛΟΓΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ (ΑΝΕΥΡΥΣΜΑ Ή ΣΤΕΝΩΣΗ)

Ε. Ε. Τζιρτζιλάκης

Εργαστήριο Ρευστομηχανικής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών ΤΕ, ΤΕΙ Δυτικής Ελλάδας,
Μ. Αλεξάνδρου 1, Κουκούλι 26334, Πάτρα

e-mail: etzirtzilakis@teiwest.gr web: <http://fluids.mech.teiwest.gr>

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται αποτελέσματα ΒιοΜαγνητοΥδροδυναμικής (ΒΜΥ) ροής σε δυο χαρακτηριστικές παθολογικές γεωμετρίες, ανευρύσματος και στένωσης, αντίστοιχα. Τα φυσικά προβλήματα περιγράφονται από συζευγμένα συστήματα μη γραμμικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους που υπόκεινται σε κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Ο φορμαλισμός της ΒΜΥ που χρησιμοποιείται εμπεριέχει αρχές της ΜαγνητοΥδροδυναμικής (ΜΥΔ) καθώς και της ΣιδηροΥδροδυναμικής (ΣΥΔ). Η αριθμητική επίλυση επιτυγχάνεται με εφαρμογή μίας εξειδικευμένης αριθμητικής μεθοδολογίας που βασίζεται στην χρήση ενός αλγορίθμου ψευδομετάβασης και στο φορμαλισμό της ρευματικής συνάρτησης και του στροβιλισμού. Η διακριτοποίηση γίνεται με χρήση πεπερασμένων διαφορών, εφαρμόζεται μία συγκεκριμένη τεχνική για την κατασκευή των συνοριακών συνθηκών του στροβιλισμού καθώς και ανάλογοι μετασχηματισμοί πλέγματος. Ένα κύριο αποτέλεσμα των μελετών ΒΜΥ είναι ότι η εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία και/ή την μεγέθυνση στροβίλου μετά από το σημείο εφαρμογής του μαγνητικού πεδίου καθώς και την μετατόπιση του σημείου επανασύνδεσης της ροής με το τοίχωμα προς την διεύθυνση της ροής. Ανάλογες μεταβολές παρατηρούνται και στο πεδίο θερμοκρασίας. Τέλος, επηρεάζονται καθοριστικά σημαντικές παράμετροι για προβλήματα βιορευστών σε παθολογικές γεωμετρίες όπως ο συντελεστής επιδερμικής τριβής και η μεταφορά θερμότητας στα τοιχώματα.

Λέξεις Κλειδιά:

ΒιοΜαγνητοΥδροδυναμική (ΒFD), ΣιδηροΥδροδυναμική (FHD), ΜαγνητοΥδροδυναμική (MHD)

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μία νέα ερευνητική περιοχή της μηχανικής ρευστών η οποία ασχολείται με τη μελέτη βιολογικών ροών υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου είναι η ΒιοΜαγνητοΥδροδυναμική (ΒΜΥ). Ένα αρχικό μοντέλο ΒΜΥ συστήθηκε στην εργασία (Haik, Pai et al. 1999) και μία επέκταση του μοντέλου ΒΜΥ έγινε στη μελέτη (Tzirtzilakis 2005). Όταν το αίμα εκτίθεται σε μαγνητικό πεδίο κατάλληλης μορφής, αναπτύσσεται σημαντική δύναμη μαγνήτισης. Αυτό συμβαίνει λόγω του οξειδίου του σιδήρου που υπάρχει στην αιμογλοβίνη των ερυθρών αιμοσφαιρίων μέσα στα ερυθρά αιμοσφαίρια και το οποίο λειτουργεί ως μαγνητικό δίπολο. Σαν αποτέλεσμα τα ερυθρά αιμοσφαίρια τείνουν να προσανατολιστούν με τον δίσκο τους παράλληλο με τις μαγνητικές γραμμές όταν εφαρμόζεται μαγνητικό πεδίο. Δηλαδή το αίμα μπορεί να θεωρηθεί σιδηρορευστό (ferrofluid) με το ρευστό φορέα να είναι το πλάσμα και τα μαγνητικά σωματίδια τα ερυθρά αιμοσφαίρια. Επιπλέον, ειδικά το αίμα παρουσιάζει σημαντική ηλεκτρική αγωγιμότητα που εξαρτάται από τον αιματοκρίτη και την θερμοκρασία και μεταβάλλεται με τον ρυθμό παροχής. Συνεπώς, για ισχυρά μαγνητικά πεδία το αίμα συμπεριφέρεται ως ηλεκτρικά αγωγίμο ρευστό που ταυτόχρονα εμφανίζει μαγνήτιση. Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο ΒΜΥ, η ροή βιορευστού υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου διέπεται από τις αρχές της Σιδηροδυναμικής (ΣΥΔ) (Rosensweig 1985, Rosensweig 1987, Bashtovoy, Berkovsky et al. 1988,

Rosensweig 1988, Fertman 1990, Berkovski and Bashtovoy 1996) και ΜαγνητοΥδροΔυναμικής (ΜΥΔ) (Sutton 1965, Hughes 1966, Cramer and Pai 1973, Davidson 2001) και οι κυριαρχούσες δυνάμεις στο πεδίο ροής είναι ταυτόχρονα η δύναμη Lorentz καθώς και η δύναμη μαγνήτισης. Το βιορευστό θεωρείται Νευτώνειο, ομογενές ασυμπιεστο και ηλεκτρικά αγώγιμο με στρωτή, μη ισόθερμη ροή.

Μία συνηθισμένη πειραματική εφαρμογή είναι η μαγνητική καθοδήγηση φαρμάκου η οποία επιτυγχάνεται με πρόσθεση τεχνητών βιοσυμβατών νανοσωματιδίων (Lu, Burdette et al. 1999, Chatterjee, Bettge et al. 2005, Puri, Liangruksa et al. 2011, Ne'mati, Ghassemi et al. 2017). Αυτά τα μαγνητικά σωματίδια αποτελούν μαγνητικά δίπολα που αυξάνουν κατά πολύ την μαγνήτιση του βιορευστού. Ως αποτέλεσμα το βιορευστό συμπεριφέρεται σαν σιδηρορευστό και η ροή του υπόκειται στους κανόνες της ΣΥΔ. Εν κατακλείδι το γενικό μοντέλο ΒΜΥ συνδέεται στενά με αυτό των ΣΥΔ και ΜΥΔ. Είναι δυνατό να επιτευχθούν αποτελέσματα που αφορούν σε ΜΥΔ ή ΣΥΔ ροές μετά από κατάλληλες αλλαγές των παραμέτρων με χρήση μόνο του γενικού ΒΜΥ μοντέλου (Tzirtzilakis 2005).

Η σύνθεση βιοσυμβατών νανοσωματιδίων για μαγνητική καθοδήγηση ή μαγνητική υπερθερμία βρίσκεται ακόμη σε πειραματικό επίπεδο (Jordan, Scholz et al. 1999, Chatterjee, Haik et al. 2001, Ritter, Ebner et al. 2004, Chatterjee, Bettge et al. 2005, Gupta and Gupta 2005, Attar, Haghpanahi et al. 2014, Pala, Serwotka et al. 2014, Qu, Li et al. 2014, Ne'mati, Ghassemi et al. 2017) και γενικά οι πειραματικές μελέτες βασικών προβλημάτων ΣΥΔ ή ΒΜΥ είναι λίγες. Μερικές αντιπροσωπευτικές αριθμητικές μελέτες με χρήση ενός αρχικού μοντέλου ΒΜΥ των Haik et. al., είναι αυτές της ροής σε κανάλι με θρόμβο (Haik, Chen et al. 2002) και της ΒΜΥ ροής σε έκκεντρη στένωση (Khashan and Haik 2006). Μία σειρά από αριθμητικές μελέτες βασικών φυσικών προβλημάτων ΒΜΥ ή ΣΥΔ που περιλαμβάνουν ροή σε στένωση, ανεύρυσμα, οριακού στρώματος, σε κανάλι ή αγωγό τετραγωνικής διατομής, με χρήση ποικίλων αριθμητικών τεχνικών, μελετήθηκαν στις εργασίες των (Tzirtzilakis and Kafoussias 2003, Tzirtzilakis and Tanoudis 2003, Loukopoulos and Tzirtzilakis 2004, Papadopoulos and Tzirtzilakis 2004, Tzirtzilakis, Sakalis et al. 2004, Tzirtzilakis 2005, Tzirtzilakis and Loukopoulos 2005, Kafoussias, Tzirtzilakis et al. 2006, Tzirtzilakis 2008, Tzirtzilakis and Kafoussias 2010, Tzirtzilakis and Xenos 2013, Xenos and Tzirtzilakis 2013, Raptis, Xenos et al. 2014, Tzirtzilakis 2015, Ferdows, Khalequ et al. 2017, Murtaza, Tzirtzilakis et al. 2017). Ένα κύριο αποτέλεσμα όλων αυτών των μελετών είναι ότι η εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία και/ή την μεγέθυνση στροβίλου μετά από το σημείο εφαρμογής του μαγνητικού πεδίου καθώς και την μετατόπιση του σημείου επανασύνδεσης της ροής με το τοίχωμα προς την διεύθυνση της ροής. Το στοιχειώδες πρόβλημα ΒΜΥ ροής σε κανάλι με χρήση του ΒΜΥ μοντέλου των Haik et al. (Haik, Pai et al. 1999) μελετήθηκε στην εργασία (Loukopoulos and Tzirtzilakis 2004). Το κύριο αποτέλεσμα ήταν η δημιουργία ενός στροβίλου στην περιοχή εφαρμογής του μαγνητικού πεδίου καθώς και η μείωση της θερμοκρασίας στην ίδια περιοχή. Την ίδια χρονική περίοδο με την δημοσίευση της (Loukopoulos and Tzirtzilakis 2004), οι Ganguly et. al. (Ganguly, Sen et al. 2004) δημοσίευσαν μια μελέτη για την ροή ηλεκτρικά μη αγώγιμου σιδηρορευστού υπό την επίδραση διπόλου. Το φυσικό τους πρόβλημα έμοιαζε με αυτό της (Loukopoulos and Tzirtzilakis 2004) και παρατήρησαν επίσης τον σχηματισμό στροβίλου καθώς και την σχετική μείωση της θερμοκρασίας στην περιοχή εφαρμογής του μαγνητικού πεδίου. Σε μεταγενέστερο χρονικά πείραμα ροής σιδηρορευστού οι Ganguly et. al. (Ganguly, Gaind et al. 2005) επαλήθευσαν την ύπαρξη του στροβίλου ως συνέπεια της εφαρμογής του μαγνητικού πεδίου. Συνεπώς το μοντέλο ΒΜΥ της εργασίας (Tzirtzilakis 2005) αποδείχθηκε πολλά υποσχόμενο για πρόβλεψη ΒΜΥ ή αμιγώς ΣΥΔ ροών. Στις παραπάνω εργασίες το αίμα θεωρήθηκε ως ένα ομογενές μη-ισόθερμο Νευτώνειο ρευστό που παρουσιάζει μαγνητικές ιδιότητες. Τα αντίστοιχα φυσικά προβλήματα περιγράφηκαν από ένα συζευγμένο σύστημα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους που υπόκεινται σε αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες. Μετά τις συνήθεις αδιαστατοποιήσεις χρησιμοποιήθηκε ο φορμαλισμός της ρευματικής συνάρτησης και του στροβιλισμού (stream function vorticity formulation).

Ένας σημαντικός παράγοντας διαμόρφωσης του πεδίου ροής σε προβλήματα ΒΜΥ είναι η μορφή του εφαρμοζόμενου μαγνητικού πεδίου (Tzirtzilakis 2005). Για το πρόβλημα ΒΜΥ ροής σε κανάλι (Tzirtzilakis 2008), όπου εφαρμόζεται μαγνητικό πεδίο με μεγάλη βαθμίδα, η μοναδική σημαντική δύναμη είναι αυτή της μαγνήτισης (Tzirtzilakis 2005) και η μοναδική καθοριστική παράμετρος είναι ο αδιάστατος μαγνητικός αριθμός. Σε μερικές περιπτώσεις η μαγνήτιση (οπότε και ο μαγνητικός αριθμός)

μπορεί να λάβει μεγάλες τιμές. Αυτή η αύξηση της μαγνήτισης μπορεί να επιτευχθεί είτε με πρόσθεση τεχνητών νανοσωματιδίων, που είναι κοινή πρακτική σε πειραματικές εφαρμογές όπως η μαγνητική καθοδήγηση φαρμάκων, είτε με μείωση του αριθμού Reynolds (Haik, Chen et al. 2002, Tzirtzilakis 2005, Tzirtzilakis 2008). Από την πλευρά της αριθμητικής επίλυσης ο μαγνητικός όρος που εισάγεται στις εξισώσεις BMY, πολλαπλασιασμένος με τον μαγνητικό αριθμό (ο οποίος είναι τάξης $10^2 - 10^3$), αποτελεί έναν πολύ έντονο «όρο πηγής» που οδηγεί σε εκτεταμένες διαταραχές του πεδίου ροής όπως την δημιουργία στροβίλων. Αυτός ο όρος «πηγή» δημιουργεί αριθμητική αστάθεια και απόκλιση του αριθμητικού σχήματος καθιστώντας δύσκολη την επίτευξη αριθμητικής λύσης ακόμη και με εξελιγμένα αριθμητικά σχήματα (Tzirtzilakis 2008). Για την αντιμετώπιση αυτής της δυσκολίας στην αριθμητική επίλυση προβλημάτων BMY, έχουν αναπτυχθεί εξειδικευμένες αριθμητικές μεθοδολογίες. Τέτοιες μεθοδολογίες αναπτύχθηκαν με πεπερασμένες διαφορές (Tzirtzilakis 2008), (Loukopoulos, Katsiaris et al. 2003), μεθόδους της οικογένειας SIMPLE (Tzirtzilakis, Sakalis et al. 2004), (Papadopoulos and Tzirtzilakis 2004) ή με τεχνικές απλοποίησης σε μη γραμμικά συστήματα ΣΔΕ για προβλήματα ομοιότητας (Kafoussias, Tzirtzilakis et al. 2008, Tzirtzilakis and Kafoussias 2010, Tzirtzilakis, Kafoussias et al. 2010). Επιπλέον, υπάρχουν αριθμητικές μέθοδοι που εξασφαλίζουν την διατήρηση της μάζας στο υπολογιστικό χωρίο για εφαρμογές της BMY με έντονους όρους πηγής ή καταβόθρας όπως οι μέθοδοι πεπερασμένων όγκων και πεπερασμένων στοιχείων (Li and Shu 2005).

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε αποτελέσματα των εργασιών (Tzirtzilakis 2008, Tzirtzilakis 2015) που αφορούν σε BMY ροή σε στένωση και ανεύρυσμα, αντίστοιχα. Η αριθμητική επίλυση έχει επιτευχθεί χρησιμοποιώντας την αριθμητική μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην εργασία (Tzirtzilakis 2008). Αυτή η μεθοδολογία βασίζεται στην χρήση πεπερασμένων διαφορών και στο φορμαλισμό της ρευματικής συνάρτησης και του στροβιλισμού. Η διακριτοποίηση γίνεται με χρήση πεπερασμένων διαφορών και εφαρμόζεται μία συγκεκριμένη τεχνική για την κατασκευή των συνοριακών συνθηκών του στροβιλισμού. Ένα κύριο συμπέρασμα των παραπάνω μελετών BMY είναι ότι η εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία και/ή την μεγέθυνση στροβίλου μετά από το σημείο εφαρμογής του μαγνητικού πεδίου καθώς και την μετατόπιση του σημείου επανασύνδεσης της ροής με το τοίχωμα προς την διεύθυνση της ροής. Εκτός από το πεδίο ταχυτήτων μεγάλες μεταβολές παρατηρούνται και στο πεδίο θερμοκρασιών. Ελπίζεται ότι τα αποτελέσματα των παρουσιαζόμενων εργασιών θα αποτελέσουν βασική γνώση για τη διεξαγωγή πειραμάτων που σχετίζονται άμεσα με εφαρμογές που αφορούν ασθενείς, όπως η στοχευμένη μεταφορά φαρμάκων με τη χρήση μαγνητικών σωματιδίων ως φορέων φαρμάκων (magnetic drug targeting), μαγνητικής θεραπείας τραυμάτων ή θεραπείας καρκινικών όγκων με πρόκληση μαγνητικής υπερθερμίας, μείωση ή σταμάτημα της αιμορραγίας κατά τη διάρκεια χειρουργικών επεμβάσεων ή πρόκλησης απόφραξης των αγγείων τροφοδοσίας καρκινικών όγκων και ανάπτυξη μαγνητικών ιχνηλατών όπως έχει ήδη περιγραφεί στις εργασίες (Khashan and Haik 2006), (Tzirtzilakis 2005, Tzirtzilakis 2008, Habibi and Ghasemi 2011, Tzirtzilakis 2015).

2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΦΟΡΜΑΛΙΣΜΟΣ

Θεωρούμε την Νευτώνια στρωτή ροή ομογενούς, ασυμπίεστου και ηλεκτρικά αγώγιμου βιορευστού. Ένα τέτοιο ρευστό θα μπορούσε να θεωρηθεί το αίμα. Κατά την ροή αίματος μέσα στο μαγνητικό πεδίο ασκούνται δύο κύριες δυνάμεις. Η πρώτη είναι η δύναμη μαγνήτισης η οποία ασκείται λόγω της τάσης προσανατολισμού των ερυθρών αιμοσφαιρίων με τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου ενώ η δεύτερη είναι η δύναμη Lorentz που δημιουργείται από την αλληλεπίδραση του μαγνητικού πεδίου με τα ιόντα του πλάσματος καθώς αυτά κινούνται. Για την δύναμη μαγνήτισης υιοθετούνται οι αρχές της ΣΥΔ (Neuringer and Rosensweig 1964, Rosensweig 1982, Rosensweig 1985, Rosensweig 1985, Rosensweig 1987, Rosensweig 1988, Haik, Pai et al. 1999). Θεωρούμε ότι το ρευστό υπόκειται σε μαγνήτιση ισορροπίας και ότι η μεταβολή του ιξώδους λόγω της μαγνήτισης είναι αμελητέα. Η υιοθέτηση της ΜΥΔ μας επιτρέπει να συμπεριλάβουμε την επίδραση της δύναμης Lorentz λόγω της ηλεκτρικής αγωγιμότητας του αίματος (Sutton 1965, Cramer and Pai 1973, Davidson 2001, Sutton and Sherman 2006). Ο συνδυασμός των ανωτέρω αρχών μας επιτρέπει να θεωρήσουμε το παρακάτω σύστημα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους που περιγράφουν την δισδιάστατη BMY ροή αίματος τόσο για την περίπτωση του ανευρύσματος όσο και της στένωσης (Tzirtzilakis 2005):

Εξίσωση συνέχειας

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

Εξισώσεις ορμής

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{F} + \mu\vec{\nabla}^2\vec{V} + \vec{J} \times \vec{B} + \mu_0 M\vec{\nabla}H \quad (2)$$

Εξισώσεις μαγνητικού πεδίου

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} = \sigma(\vec{V} \times \vec{B}) \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{H} + \vec{M}) = 0$$

Εξίσωση ενέργειας

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} + \mu_0 T \frac{\partial M}{\partial T} \frac{DH}{Dt} - \frac{\vec{J} \cdot \vec{J}}{\sigma} = k\nabla^2 T + \mu\Phi \quad (4)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις $\vec{V} = (u, v)$ είναι το πεδίο ταχυτήτων, $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}$ είναι ο τελεστής του Stokes, $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ με x, y οι άξονες ενός διςδιάστατου συστήματος συντεταγμένων, ρ είναι η πυκνότητα, p η πίεση, \vec{F} η καθολική δύναμη ανά μονάδα όγκου, μ το δυναμικό ιξώδες, μ₀ η διαπερατότητα του κενού, \vec{M} η μαγνήτιση, \vec{H} η ένταση του μαγνητικού πεδίου (magnetic field strength intensity), \vec{B} η μαγνητική επαγωγή (magnetic induction), σ η ηλεκτρική αγωγιμότητα του ρευστού, \vec{J} η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος, T η θερμοκρασία, k ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του ρευστού, C_p είναι η ειδική θερμότητα υπό σταθερή πίεση και Φ η συνάρτησης διάχυσης η οποία στις δύο διαστάσεις έχει την μορφή:

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2.$$

Οι όροι $\mu_0 M\vec{\nabla}H$ των εξισώσεων (2), αναπαριστούν την δύναμη μαγνήτισης ανά μονάδα όγκου και εξαρτώνται από την ύπαρξη βάρθρωσης του μαγνητικού πεδίου, ενώ οι όροι $\vec{J} \times \vec{B}$ που επίσης εμφανίζονται στην (2), αναπαριστούν την δύναμη Lorentz ανά μονάδα όγκου και εμφανίζονται λόγω της ηλεκτρικής αγωγιμότητας. Οι παραπάνω δύο όροι είναι γενικά της ίδιας τάξης μεγέθους και δεν μπορεί να παραλειφθεί ο ένας από τους δύο χωρίς συγκεκριμένες παραδοχές ή θεωρήσεις. Στην ΜΥΔ ο πρώτος όρος παραλείπεται ενώ ο δεύτερος παραλείπεται στην ΣΥΔ. Ο όρος $\mu_0 T (\partial M / \partial T) (DH / Dt)$ της εξίσωσης (4), αναπαριστά θερμική ισχύ ανά μονάδα όγκου λόγω του μαγνητοθερμικού φαινομένου. Αυτός ο όρος εμφανίζεται στην ΣΥΔ (Neuringer and Rosensweig 1964, Rosensweig 1982, Rosensweig 1985, Rosensweig 1985, Rosensweig 1987, Rosensweig 1988, Haik, Pai et al. 1999), ενώ ο όρος $\vec{J} \cdot \vec{J} / \sigma$ αναπαριστά την θέρμανση Joule που εμφανίζεται στην ΜΥΔ (Sutton 1965, Cramer and Pai 1973, Davidson 2001, Sutton and Sherman 2006).

2.1 Μαγνήτιση και Μαγνητικό πεδίο

Η μαγνήτιση ουσιαστικά μοντελοποιεί την συμπεριφορά του ρευστού όταν εκτεθεί στο μαγνητικό πεδίο. Στην κατάσταση μαγνήτισης ισορροπίας (equilibrium magnetization) η μαγνήτιση είναι γενικά συνάρτηση της πυκνότητας και της θερμοκρασίας του ρευστού καθώς και της έντασης του μαγνητικού πεδίου. Στα φυσικά προβλήματα που μελετώνται υιοθετείται μία έκφραση που εμπλέκει την ένταση του μαγνητικού πεδίου και την θερμοκρασία (Matsuki, Yamasawa et al. 1977, Tzirtzilakis 2005, Tzirtzilakis 2008, Tzirtzilakis 2015):

$$M = KH(T_c - T) \quad (5)$$

όπου K μία σταθερά.

Για το μαγνητικό πεδίο θεωρούμε την μορφή που επιτυγχάνεται με χρήση ρευματοφόρου αγωγού. Οι συνιστώσες της έντασης του μαγνητικού πεδίου \bar{H}_x και \bar{H}_y κατά τις συντεταγμένες \bar{x} και \bar{y} , $\bar{H} = (\bar{H}_x, \bar{H}_y)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$H_x = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{y-b}{(x-a)^2 + (y-b)^2}, \quad H_y = -\frac{\gamma}{2\pi} \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

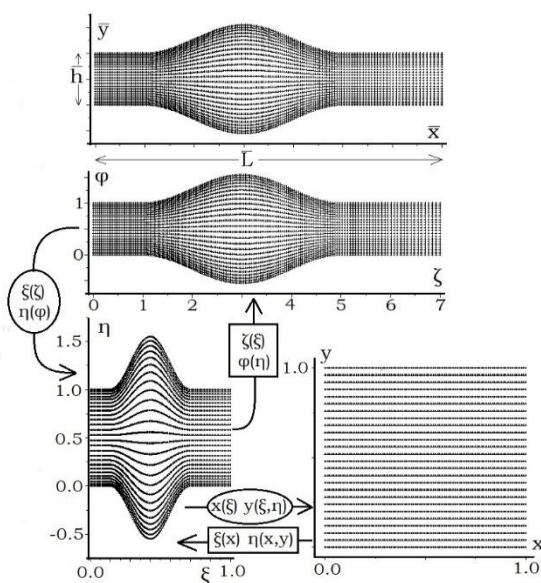
όπου (a,b) είναι το σημείο εφαρμογής του μαγνητικού πεδίου και γ είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο $(x = a, y = b)$. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου H δίνεται από την σχέση

$$H(x, y) = [H_x^2 + H_y^2]^{1/2} = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \quad (6)$$

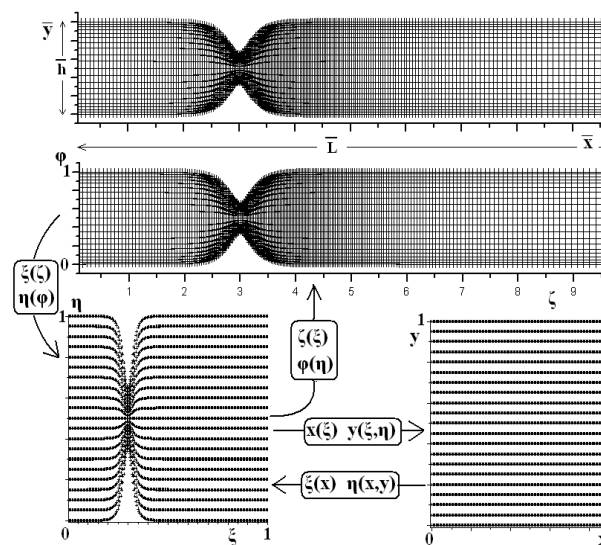
3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η μεθοδολογία που χρησιμοποιείται για την αριθμητική επίλυση των προβλημάτων ΒΜΥ σε στένωση καθώς και σε ανεύρυσμα είναι αυτή που αναπτύχθηκε στην εργασία (Tzirtzilakis 2008). Η μεθοδολογία αυτή στηρίζεται ουσιαστικά στην χρήση του φορμαλισμού της ρευματικής συνάρτησης και του στροβιλισμού και των πεπερασμένων διαφορών και απαρτίζεται από τα ακόλουθα τέσσερα συστατικά:

- (i) Πρώτα γίνεται παραβολοποίηση του προβλήματος με χρήση μίας μεθόδου ψευδομετάβασης όπου ο χρόνος παίζει τον ρόλο των επαναλήψεων για την επίτευξη της αριθμητικής λύσης. Η παραβολοποίηση αυτή μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε απλούστερες αριθμητικές τεχνικές για την επίτευξη λύσης. Στις συγκεκριμένες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε ένα εκπεφρασμένο αριθμητικό σχήμα για την προώθηση στον «χρόνο», δηλαδή στις επαναλήψεις.
- (ii) Ακολουθεί μία σειρά από μετασχηματισμούς του υπολογιστικού πλέγματος το οποίο πυκνώνεται στα τοιχώματα καθώς και στην περιοχή που αναμένουμε τις μεγαλύτερες διαταραχές στην ροή. Με αυτόν τον τρόπο οι υπολογισμοί γίνονται σε ένα απλό ορθογώνιο χωρίο και μέσω των μετασχηματισμών παρακάμπτουμε την απευθείας εκτέλεση των υπολογισμών στο ποιο πολύπλοκο χωρίο του φυσικού προβλήματος. Σχηματική αναπαράσταση των μετασχηματισμών του πλέγματος για την περίπτωση της ΒΜΥ ροής σε ανεύρυσμα απεικονίζεται στην Εικόνα 1. Για την περίπτωση της στένωσης έχουμε ανάλογους μετασχηματισμούς που απεικονίζονται στην Εικόνα 2. Με τους παραπάνω μετασχηματισμούς εκτός από τον μετασχηματισμό του πλέγματος επιτυγχάνεται πύκνωσή του προς τα τοιχώματα (κατά την y διεύθυνση) καθώς και προς το σημείο εφαρμογής του μαγνητικού πεδίου (κατά την x διεύθυνση).



Εικόνα 1: Μετασχηματισμοί του πλέγματος για την ΒΜΥ σε ανεύρυσμα (Tzirtzilakis 2015)



Εικόνα 2 Μετασχηματισμοί του πλέγματος για την ΒΜΥ σε στένωση (Tzirtzilakis 2008)

- (iii) Εισάγεται μία μεθοδολογίας κατασκευής συνοριακών συνθηκών για την εξίσωση στροβιλισμού στα τοιχώματα. Αυτή η μεθοδολογία είναι απαραίτητη για να μην δημιουργούνται αριθμητικές αστάθειες κατά την διαδικασία της αριθμητικής επίλυσης.
- (iv) Τέλος, αναπτύσσεται μία ημί-εκπεφρασμένη (semi-implicit) αριθμητική τεχνική για τον υπολογισμό της λύσης το επόμενο χρονικό βήμα (επανάληψη) ώστε στο τέλος να υπολογιστεί η λύση μόνιμης κατάστασης. Για την διακριτοποίηση στον χώρο χρησιμοποιούμε ένα μη εκπεφρασμένο αριθμητικό σχήμα που καταλήγει σε χειρισμούς τριδιαγώνιου πίνακα αγνώστων και επίλυση του αντίστοιχου αλγεβρικού συστήματος με την μέθοδο του Thomas.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η παραγωγή των αποτελεσμάτων για τα φυσικά προβλήματα που μελετώνται επιτυγχάνεται με την εφαρμογή του παραπάνω αλγορίθμου. Εκτός από την κλασσική μελέτη ανεξαρτησίας με τον αριθμό των κομβικών σημείων του πλέγματος γίνονται και συγκρίσεις με πειραματικά αποτελέσματα για την υδροδυναμική περίπτωση. Ένα σημαντικό θέμα για την επίτευξη των αποτελεσμάτων είναι η ανάθεση ρεαλιστικών τιμών στις αδιάστατες παραμέτρους που διέπουν το φυσικό πρόβλημα. Αντιπροσωπευτικές περιπτώσεις φυσικών προβλημάτων δίνονται στις εργασίες (Loukopoulos and Tzirtzilakis 2004, Tzirtzilakis 2008, Tzirtzilakis 2015). Μία τέτοια περίπτωση είναι να θεωρήσουμε ότι το αίμα πυκνότητας $\rho=1050\text{kg m}^{-3}$ και ιξώδους $\mu=3.2 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, ρέει με μέγιστη ταχύτητα $u_r=3.048 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$ ανάμεσα στα τοιχώματα που απέχουν απόσταση $h=2.0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. Το μαγνητικό καλώδιο είναι τοποθετημένο κάθετα στην ροή και σε απόσταση $b=10^{-3} \text{ m}$ κάτω από την κατώτερη πλάκα. Σχετικά με το θερμικό πρόβλημα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η θερμοκρασία του αίματος είναι $T_f=41^\circ\text{C}$ ενώ την τοιχωμάτων $T_w=37^\circ\text{C}$. Για το αίμα επίσης έχουμε πειραματικά καθορισμένες τιμές $c_p=3.9 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ και $k=0.5 \text{ J m}^{-1}\text{s}^{-1}\text{K}^{-1}$. Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω τιμές των φυσικών ποσοτήτων έχουμε αντίστοιχες τιμές των παρακάτω αδιάστατων παραμέτρων ως εξής:

$$Re = \frac{\rho u_r h}{\mu} = 200 \text{ (Αριθμός Reynolds)}, \quad Ec = \frac{u_r^2}{c_p (T_f - T_w)} \approx 5.96 \times 10^{-8}$$

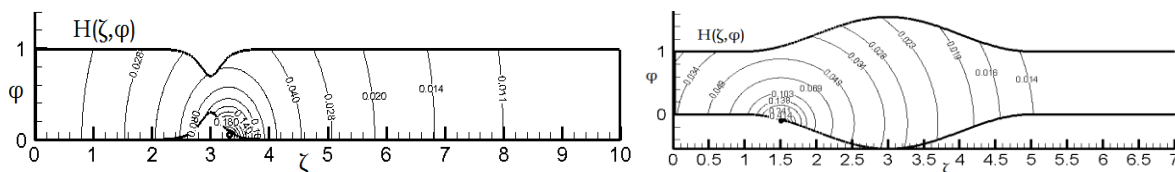
$$\varepsilon = \frac{T_w}{T_f - T_w} = 77.5 \text{ (θερμοκρασιακός αριθμός)}, \quad Pr = \frac{c_p \mu}{k} = 25 \text{ (Αριθμός Prandtl)}$$

$$Mn_F = \frac{\mu_0 H_0^2 K (T_f - T_w)}{\rho u_r^2} = \frac{\mu_0 H_0 K H_0 (T_f - T_w)}{\rho u_r^2} \approx \frac{B_0 M_0}{\rho u_r^2} = 328 \text{ (Μαγνητικός αριθμός ΣΥΔ)}$$

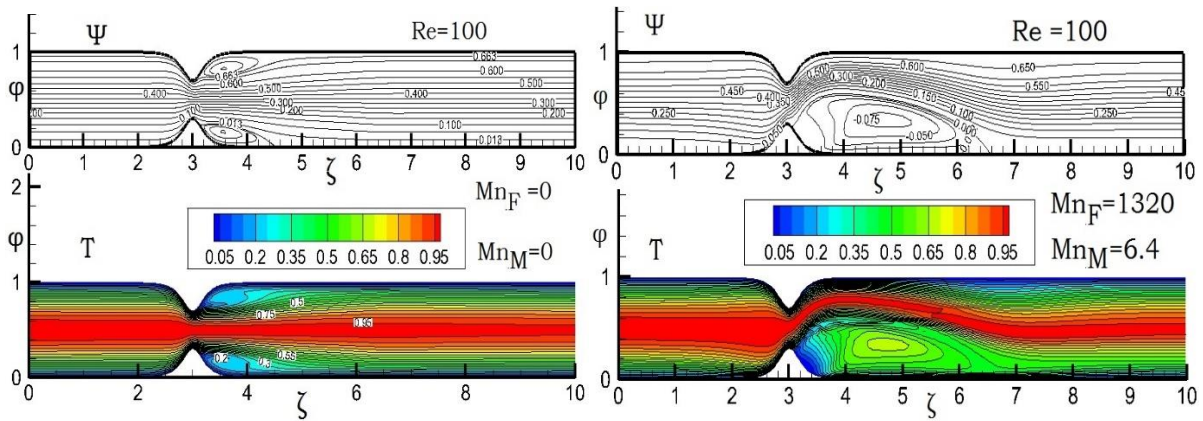
$$Mn_M = \frac{\mu_0^2 H_0^2 h^2 \sigma}{\mu} = \frac{B_0^2 h^2 \sigma}{\mu} \approx 6.4 \text{ (Μαγνητικός αριθμός ΜΥΔ)}$$

Στους παραπάνω αδιάστατους αριθμούς ο μαγνητικός αριθμός ΣΥΔ, Mn_M είναι το τετράγωνο του αριθμού Hartman γνωστού στην ΜΥΔ. Στις παραπάνω παραμέτρους B_0 και M_0 είναι η μαγνητική επαγωγή και η μαγνήτιση στο σημείο $(\alpha, 0)$ με το καλώδιο τοποθετημένο στην θέση (α, b) . Από πειραματικές μελέτες γνωρίζουμε ότι για μαγνητικό πεδίο αναφοράς $B_0=8\text{T}$ έχουμε $M_0=40\text{A M}^{-1}$, επίσης η ηλεκτρική αγωγιμότητα του αίματος είναι $\sigma=0.8\text{S m}^{-1}$ (Frewer 1974, Chato 1980, Pedley 1980, Skalak and Chien 1987, Gabriel, Lau et al. 1996, Haik, Pai et al. 1999, Tzirtzilakis 2005, Tzirtzilakis 2008, Tzirtzilakis 2015).

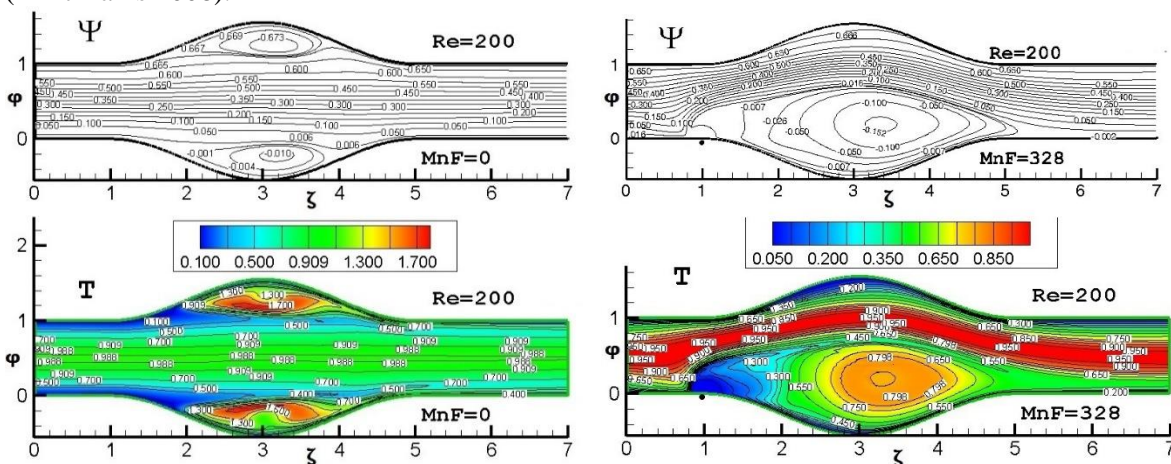
Τα αδιάστατα φυσικά χωρία, στο επίπεδο (ζ, φ) , για την περίπτωση της στένωσης και του ανευρύσματος απεικονίζονται στην Εικόνα 3 όπου φαίνονται και οι ισοϋψείς της έντασης του μαγνητικού πεδίου $H(\zeta, \varphi)$. Η ακριβής θέση του καλωδίου είναι ζωτικής σημασίας για την μορφοποίηση του ροϊκού πεδίου.



Εικόνα 3: Αδιάστατο φυσικό χωρίο και ισοϋψείς της έντασης του μαγνητικού πεδίου $H(\zeta, \varphi)$ για την στένωση (αριστερά) και το ανεύρυσμα (δεξιά), αντίστοιχα.



Εικόνα 4: Ρευματική συνάρτηση $\Psi(\varphi, \zeta)$ και θερμοκρασία $T(\varphi, \zeta)$, για την υδροδυναμική περίπτωση (αριστερά) και μετά από την εφαρμογή μαγνητικού πεδίου (δεξιά) για την στένωση και για $Re=100$ (Tzirtzilakis 2008).



Εικόνα 5: Ρευματική συνάρτηση $\Psi(\varphi, \zeta)$ και θερμοκρασία $T(\varphi, \zeta)$, για την υδροδυναμική περίπτωση (αριστερά) και μετά από την εφαρμογή μαγνητικού πεδίου (δεξιά) για την περίπτωση του ανευρύσματος και για $Re=200$ (Tzirtzilakis 2015).

Στις αριστερές γραφικές παραστάσεις της Εικόνα 4 απεικονίζεται η ρευματική συνάρτηση $\Psi(\varphi, \zeta)$ και η θερμοκρασία $T(\varphi, \zeta)$, για την υδροδυναμική περίπτωση. Παρατηρούμε την κλασική συμμετρία τόσο στο πεδίο ταχυτήτων όσο και της θερμοκρασίας. Στις δεξιές γραφικές παραστάσεις της Εικόνα 4 παρατηρούμε πως διαμορφώνεται το πεδίο ταχυτήτων (μέσω της ρευματικής συνάρτησης) και της θερμοκρασίας για $Re=100$. Η συμμετρία της ροής παύει πλέον να υφίσταται και δημιουργείται ουσιαστικά ένας στρόβιλος κατάντι του σημείου εφαρμογής του μαγνητικού πεδίου. Σε αυτόν τον στρόβιλο παρατηρούνται γενικά μικρότερες ταχύτητες από το υπόλοιπο πεδίο ροής. Το σημείο επανακόλλησης της ροής με το κάτω τοίχωμα μετατοπίζεται αρκετά κατάντι του σημείου εφαρμογής του μαγνητικού πεδίου, ενώ ο στρόβιλος στο πάνω τοίχωμα ουσιαστικά παύει να υφίσταται. Ανάλογη μεταβολή εμφανίζεται και στο πεδίο θερμοκρασίας πράγμα που υποδηλώνει ότι η μετάδοση θερμότητας γίνεται κυρίως δια μεταγωγής (convection) και ουσιαστικά καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από το πεδίο ταχυτήτων. Η επίδραση του μαγνητικού πεδίου είναι πολύ μεγάλη και σε άλλες κρίσιμες ποσότητες που μελετώνται όπως είναι ο συντελεστής τριβής στα τοιχώματα καθώς και η μεταφορά θερμότητας στα τοιχώματα. Πληρέστερη ανάλυση και λεπτομέρειες δίνονται στην εργασία (Tzirtzilakis 2008).

Στην Εικόνα 5 δίνονται ανάλογα αποτελέσματα για την περίπτωση του ανευρύσματος. Η υδροδυναμική περίπτωση απεικονίζεται στις αριστερές γραφικές παραστάσεις της Εικόνα 5 όπου φαίνεται η ρευματική συνάρτηση και ισουψείς της θερμοκρασίας. Η υδροδυναμική περίπτωση γι' αυτή την περίπτωση του ανευρύσματος, όπως και για την περίπτωση της στένωσης, έχει συγκριθεί με αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα και έχει βρεθεί σε πολύ καλή συμφωνία. Το γεγονός αυτό καταδεικνύει την αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου που χρησιμοποιείται παρόλο που εδώ τα προβλήματα έχουν

απλοποιηθεί σε δύο διαστάσεις (Tzirtzilakis 2008, Tzirtzilakis 2015). Με την εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου λαμβάνουμε τις δεξιές γραφικές απεικονίσεις της Εικόνα 5 για την ρευματική συνάρτηση και την θερμοκρασία, αντίστοιχα. Η επίδραση του μαγνητικού πεδίου είναι ανάλογη με αυτή που εμφανίζεται στην περίπτωση της στένωσης (δεξιές απεικονίσεις της Εικόνα 4), δηλαδή η συμμετρία παύει να υπάρχει και δημιουργείται ένα κυρίαρχος στρόβιλος στην κάτω πλάκα και κατάντι του σημείου εφαρμογής του μαγνητικού πεδίου. Ο στρόβιλος στην πάνω πλάκα έχει σχεδόν απαλειφθεί για την περίπτωση που ο αριθμός $Re=200$ και ο μαγνητικός αριθμός ΣΥΔ, $Mn_F=328$. Ανάλογα αποτελέσματα με αυτά της στένωσης φαίνονται και για την θερμοκρασία στο ανεύρυσμα όπου το πεδίο θερμοκρασίας καθορίζεται ουσιαστικά από το πεδίο ταχυτήτων. Πληρέστερη ανάλυση και λεπτομέρειες για την σημαντική επίδραση του μαγνητικού πεδίου και σε άλλες σημαντικές παραμέτρους του προβλήματος όπως τον συντελεστή επιδερμικής τριβής στις πλάκες και την αντίστοιχη μεταφορά θερμότητας στα τοιχώματα δίνονται στην εργασία (Tzirtzilakis 2015).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Attar, M. M., M. Haghpanahi, S. Amanpour and M. Mohaqeq (2014). "Analysis of bioheat transfer equation for hyperthermia cancer treatment." Journal of Mechanical Science and Technology 28(2): 763-771.
- Bashtovoy, V. G., B. M. Berkovsky and A. N. Vislovich (1988). Introduction to thermomechanics of magnetic fluids. Washington, Hemisphere Pub. Corp.
- Berkovski, B. and V. Bashtovoy (1996). Magnetic fluids and applications handbook. New York, Begell house inc.
- Chato, J. C. (1980). "Heat-Transfer to Blood-Vessels." Journal of Biomechanical Engineering-Transactions of the Asme 102(2): 110-118.
- Chatterjee, J., M. Bettge, Y. Haik and C. J. Chen (2005). "Synthesis and characterization of polymer encapsulated Cu-Ni magnetic nanoparticles for hyperthermia applications." Journal of Magnetism and Magnetic Materials 293(1): 303-309.
- Chatterjee, J., Y. Haik and C. J. Chen (2001). "Synthesis and characterization of heat-stabilized albumin magnetic microspheres." Colloid and Polymer Science 279(11): 1073-1081.
- Cramer, K. R. and S.-i. Pai (1973). Magnetofluid dynamics for engineers and applied physicists. Washington, New York, Scripta Pub. Co Mc-Graw-Hill.
- Davidson, P. A. (2001). An introduction to magnetohydrodynamics. Cambridge, UK ; New York, Cambridge University Press.
- Ferdows, M., T. S. Khalequ, E. E. Tzirtzilakis and S. Sun (2017). "Effects of Radiation and Thermal Conductivity on MHD Boundary Layer Flow with Heat Transfer along a Vertical Stretching Sheet in a Porous Medium." Journal of Engineering Thermophysics 26: 1-11.
- Fertman, V. E. (1990). Magnetic fluids guidebook : properties and applications. New York, Hemisphere Pub. Corp.
- Frewer, R. A. (1974). "Electrical-Conductivity of Flowing Blood." Biomedical Engineering 9(12): 552-555.
- Gabriel, S., R. W. Lau and C. Gabriel (1996). "The dielectric properties of biological tissues .3. Parametric models for the dielectric spectrum of tissues." Physics in Medicine and Biology 41(11): 2271-2293.
- Ganguly, R., A. P. Gaid, S. Sen and I. K. Puri (2005). "Analyzing ferrofluid transport for magnetic drug targeting." Journal of Magnetism and Magnetic Materials 289: 331-334.
- Ganguly, R., S. Sen and I. K. Puri (2004). "Heat transfer augmentation using a magnetic fluid under the influence of a line dipole." Journal of Magnetism and Magnetic Materials 271(1): 63-73.
- Gupta, A. K. and M. Gupta (2005). "Synthesis and surface engineering of iron oxide nanoparticles for biomedical applications." Biomaterials 26(18): 3995-4021.

- Habibi, M. R. and M. Ghasemi (2011). "Numerical study of magnetic nanoparticles concentration in biofluid (blood) under influence of high gradient magnetic field." Journal of Magnetism and Magnetic Materials 323(1): 32-38.
- Haik, Y., C. J. Chen and J. Chatterjee (2002). "Numerical simulation of biomagnetic fluid in a channel with thrombus." Journal of Visualization 5(2): 187-195.
- Haik, Y., V. Pai and C. J. Chen (1999). Biomagnetic Fluid Dynamics. Fluid Dynamics at Interfaces. W. Shyy and N. R., Cambridge University Press: 439-452.
- Hughes, W. F. (1966). The electromagnetodynamics of fluids. New York,, Wiley.
- Jordan, A., R. Scholz, P. Wust, H. Fähling and F. Roland (1999). "Magnetic fluid hyperthermia (MFH): Cancer treatment with AC magnetic field induced excitation of biocompatible superparamagnetic nanoparticles." Journal of Magnetism and Magnetic Materials 201(1-3): 413-419.
- Kafoussias, N. G., E. E. Tzirtzilakis and A. Raptis (2008). "Free-forced convective boundary-layer flow of a biomagnetic fluid under the action of a localized magnetic field." Canadian Journal of Physics 86(3): 447-457.
- Kafoussias, N. G., E. E. Tzirtzilakis, M. Xenos and V. C. Loukopoulos (2006). "Turbulent biomagnetic fluid flow in a rectangular channel under the action of a localized magnetic field." International Journal of Engineering Science 44(18-19): 1205-1224.
- Khashan, S. A. and Y. Haik (2006). "Numerical simulation of biomagnetic fluid downstream an eccentric stenotic orifice." Physics of Fluids 18(11).
- Li, F. and C.-W. Shu (2005). "Locally Divergence-Free Discontinuous Galerkin Methods for MHD Equations." Journal of Scientific Computing 22-23(1-3): 413-442.
- Loukopoulos, V. C., G. A. Katsiaris and G. T. Karahalios (2003). "A steady-state solver for the simulation of Taylor vortices in spherical annular flow." Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 192(26-27): 2993-3003.
- Loukopoulos, V. C. and E. E. Tzirtzilakis (2004). "Biomagnetic channel flow in spatially varying magnetic field." International Journal of Engineering Science 42(5-6): 571-590.
- Lu, X. Q., E. C. Burdette and G. K. Svensson (1999). "A dual-frequency ultrasonic system for breast cancer treatment." Acta Physica Sinica-Overseas Edition 8: S345-S349.
- Matsuki, H., K. Yamasawa and K. Murakami (1977). "Experimental Considerations on a New Automatic Cooling Device Using Temperature-Sensitive Magnetic Fluid." Ieee Transactions on Magnetics 13(5): 1143-1145.
- Murtaza, M. G., E. E. Tzirtzilakis and M. Ferdows (2017). "Effect of electrical conductivity and magnetization on the biomagnetic fluid flow over a stretching sheet." ZAMP 68.
- Ne'mati, S. M. A., M. Ghassemi and A. Shahidian (2017). "Numerical Investigation of Drug Delivery to Cancerous Solid Tumors by Magnetic Nanoparticles Using External Magnet." Transport in Porous Media 119(2): 461-480.
- Neuringer, J. L. and R. E. Rosensweig (1964). "Ferrohydrodynamics." Physics of Fluids 7: 1927--1937.
- Pala, K., A. Serwotka, F. Jelen, P. Jakimowicz and J. Otlewski (2014). "Tumor-specific hyperthermia with aptamer-tagged superparamagnetic nanoparticles." Int J Nanomedicine 9: 67-76.
- Papadopoulos, P. K. and E. E. Tzirtzilakis (2004). "Biomagnetic flow in a curved square duct under the influence of an applied magnetic field." Physics of Fluids 16(8): 2952-2962.
- Pedley, T. J. (1980). The fluid mechanics of large blood vessels. Cambridge, Cambridge University Press.
- Puri, I. K., M. Liangruksa and R. Ganguly (2011). "Parametric investigation of heating due to magnetic fluid hyperthermia in a tumor with blood perfusion." Journal of Magnetism and Magnetic Materials 323(6): 708-716.
- Qu, Y., J. Li, J. Ren, J. Leng, C. Lin and D. Shi (2014). "Enhanced magnetic fluid hyperthermia by micellar magnetic nanoclusters composed of Mn(x)Zn(1-x)Fe(2)O(4) nanoparticles for induced tumor cell apoptosis." ACS Appl Mater Interfaces 6(19): 16867-16879.

- Raptis, A., M. A. Xenos, E. E. Tzirtzilakis and M. Matsagkas (2014). "Finite element analysis of magnetohydrodynamic effects on blood flow in an aneurysmal geometry." Physics Of Fluids 26(10): 101901.
- Ritter, J. A., A. D. Ebner, K. D. Daniel and K. L. Stewart (2004). "Application of high gradient magnetic separation principles to magnetic drug targeting." Journal of Magnetism and Magnetic Materials 280(2-3): 184-201.
- Rosensweig, R. E. (1982). "Magnetic Fluids." Scientific American 247(4): 136-&.
- Rosensweig, R. E. (1985). "Directions in Ferrohydrodynamics." Journal of Applied Physics 57(8): 4259-4264.
- Rosensweig, R. E. (1985). Ferrohydrodynamics. Cambridge ; New York, Cambridge University Press.
- Rosensweig, R. E. (1987). "Magnetic Fluids." Annual Review of Fluid Mechanics 19: 437-463.
- Rosensweig, R. E. (1988). "An Introduction to Ferrohydrodynamics." Chemical Engineering Communications 67: 1-18.
- Skalak, R. and S. Chien (1987). Handbook of bioengineering. New York, McGraw Hill Book Company.
- Sutton, G. W. (1965). Engineering magnetohydrodynamics. New York, McGraw-Hill.
- Sutton, G. W. and A. Sherman (2006). Engineering magnetohydrodynamics. Mineola, NY., Dover Publications.
- Tzirtzilakis, E. E. (2005). "A mathematical model for blood flow in magnetic field." Physics of Fluids 17(7).
- Tzirtzilakis, E. E. (2008). "Biomagnetic fluid flow in a channel with stenosis." Physica D-Nonlinear Phenomena 237(1): 66-81.
- Tzirtzilakis, E. E. (2008). "A simple numerical methodology for BFD problems using stream function vorticity formulation." Communications in Numerical Methods in Engineering 24(8): 683-700.
- Tzirtzilakis, E. E. (2015). "Biomagnetic fluid flow in an aneurysm using ferrohydrodynamics principles." Physics of Fluids 27(6): 061902.
- Tzirtzilakis, E. E. and N. G. Kafoussias (2003). "Biomagnetic fluid flow over a stretching sheet with non linear temperature dependent magnetization." Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Physik 54(4): 551-565.
- Tzirtzilakis, E. E. and N. G. Kafoussias (2010). "Three-Dimensional Magnetic Fluid Boundary Layer Flow Over a Linearly Stretching Sheet." Journal of Heat Transfer-Transactions of the Asme 132(1).
- Tzirtzilakis, E. E., N. G. Kafoussias and A. Raptis (2010). "Numerical study of forced and free convective boundary layer flow of a magnetic fluid over a flat plate under the action of a localized magnetic field." ZAMP 61(5): 929-947.
- Tzirtzilakis, E. E. and V. C. Loukopoulos (2005). "Biofluid flow in a channel under the action of a uniform localized magnetic field." Computational Mechanics 36(5): 360-374.
- Tzirtzilakis, E. E., V. D. Sakalis, N. G. Kafoussias and P. M. Hatzikonstantinou (2004). "Biomagnetic fluid flow in a 3D rectangular duct." International Journal for Numerical Methods in Fluids 44(12): 1279-1298.
- Tzirtzilakis, E. E. and G. B. Tanoudis (2003). "Numerical study of biomagnetic fluid flow over a stretching sheet with heat transfer." International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow 13(7): 830-848.
- Tzirtzilakis, E. E. and M. A. Xenos (2013). "Biomagnetic fluid flow in a driven cavity." MECCANICA 48(1): 187-200.
- Xenos, M. A. and E. E. Tzirtzilakis (2013). "MHD Effects on Blood Flow in a Stenosis." Advances in Dynamical Systems and Applications 8(2): 427-437.