

Προσδιορισμός των διαταραχών που συντηρούν τους μέσους στροβίλους σε τυρβώδη ροή Couette

Μάριος-Ανδρέας Νικολαΐδης* και Πέτρος Ι. Ιωάννου

Τμήμα Φυσικής, Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα

* e-mail: mnikolaidis@phys.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι διατμητικές ροές κοντά σε τοιχώματα καθίστανται τυρβώδεις τροφοδοτώντας μέρος της κινητικής ενέργειας της μέσης ροής στις διαταραχές. Ο μηχανισμός με τον οποίο γίνεται η μεταφορά που συντηρεί την τύρβη και ο τρόπος που η τύρβη αναδρά στη μέση ροή είναι θεμελιώδη ερωτήματα που δεν έχουν πλήρως διελευκανθεί. Σε αυτήν την εργασία δείχνουμε ότι πρωταρχικό ρόλο στη διατήρηση της τύρβης έχουν οι πλέον ασταθείς διευθύνσεις Lyapunov της μέσης χρονοεξαρτώμενης ροής της τυρβώδους κατάστασης, όπου η μέση ροή ορίζεται ως η ανά πάσα χρονική στιγμή χωρικά μέση τιμή των ταχυτήτων στη διεύθυνση της χρονικά μέσης ροής. Αυτή η χρονοεξαρτώμενη μέση ροή εμπεριέχει τους μέσους στροβίλους (rolls) με τις αντίστοιχες προσαυξήσεις της μέσης ροής (streaks). Αυτές οι διευθύνσεις Lyapunov συντηρούν τους μέσους στροβίλους οι οποίοι στη συνέχεια συντηρούν τις προσαυξήσεις της μέσης ροής, οι οποίες στη συνέχεια τροφοδοτούν τις διαταραχές διατηρώντας την τύρβη μέσω αυτού του αναγεννητικού κύκλου. Το αποτέλεσμα αυτό οδηγεί σε αναλυτικό χαρακτηρισμό των διαταραχών που συντηρούν τον αναγεννητικό κύκλο και μέσω αυτού την τύρβη. Στην εργασία αυτή επίσης δείχνουμε με αριθμητικό πείραμα DNS ότι η καταστολή των προεξαρχόντων διευθύνσεων Lyapunov σε μία ροή Couette με αριθμό Reynolds $Re = 600$ καθιστά τη ροή στρωτή.

Λέξεις κλειδιά: τυρβώδης ροή, έλεγχος τύρβης

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι τυρβώδεις ροές τροφοδοτούνται συνεχώς από εξωτερικές πηγές ενέργειας, η οποία στη συνέχεια διέρχεται από τις μεγαλύτερες κλίμακες της ροής έως τις μικρότερες όπου και αναλώνεται. Όμως, μελέτες σε πειράματα (Bakewell Jr. and Lumley 1967, Kim et al. 1971, Kline et al. 1967) και ανάλυση αριθμητικών προσομοιώσεων (DNS) (Jiménez and Moin 1991, Kim et al. 1987) ανέδειξαν χαρακτηριστικές συνεκτικές δομές στα τοιχώματα οι οποίες εικάζεται ότι είναι απαραίτητες για την διατήρηση της τύρβης μέσω ενός αναγεννητικού κύκλου στον οποίον η ροή της ενέργειας ανακυκλώνεται (Hamilton et al. 1995, Jiménez 1994, Kim et al. 1971). Αυτός ο κύκλος λειτουργεί με βάση μια χαρακτηριστική συνεκτική δομή και αναφέρεται ως SSP (self-sustaining process) (Hamilton et al. 1995, Jiménez and Pinelli 1999, Waleffe 1997). Η χαρακτηριστική συνεκτική δομή του κύκλου είναι προσαυξήσεις της ροής, δηλαδή εντοπισμένες περιοχές αυξημένης ή μειωμένης ταχύτητας στη διεύθυνση κίνησης της ροής, και ημικυλινδρικοί στρόβιλοι με τον άξονά τους ευθυγραμμισμένο στη διεύθυνση της ροής οι οποίοι επιπλέον συμπίπτουν με τις προσαυξήσεις. Η μεταφορά μειωμένης (ή αυξημένης) ταχύτητας από τα τοιχώματα προς το εσωτερικό της ροής γίνεται μέσω του μηχανισμού lift-up από τους στροβίλους προκαλώντας τη

μεταβολή τόσο της θέσης όσο και της έντασης των προσανξήσεων. Επιπλέον, η παρουσία ενός διαταρακτικού πεδίου από τη μέση ροή είναι απαραίτητη αν και το κατά πόσο αυτή αποτελεί τους στροβίλους (Adrian 2007, Jiménez and Pinelli 1999, Schoppa and Hussain 2000; 2002) ή εάν προκαλεί τάσεις Reynolds οι οποίες έχουν τις σωστές ροπές για να συντηρήσουν τους στροβίλους (Hamilton et al. 1995) δεν έχει εξακριβωθεί. Επιπλέον έχουν προταθεί διαφορετικοί φυσικοί μηχανισμοί για το πώς συντηρούνται οι διαταραχές αυτές, επικαλούμενοι είτε την υδροδυναμική αστάθεια των προσανξήσεων (Waleffe 1997) ή το αποτέλεσμα έντονης μεταβατικής αύξησης στη ροή (Schoppa and Hussain 2002). Όμως οι μηχανισμοί που έχουν προταθεί περιγράφουν μόνο τη δυναμική μέρους του κύκλου, εξηγώντας μόνο τη συντήρηση των διαταραχών, χωρίς να εξηγούν πώς σχηματίζεται και διατηρείται ο κύκλος.

Η στατιστική δυναμική (SSD) ενός συνόλου πεδίων διαταραχών με διατήρηση στατιστικών ροών έως δεύτερης τάξης, που αποκαλείται θεωρία S3T, έδειξε ότι ο SSP εμπεριέχεται σε αυτή την ιδιαίτερα απλοποιημένη δυναμική των Navier-Stokes (Farrell et al. 2017, Farrell and Ioannou 2012). Σε αυτή τη δυναμική απομονώνεται η μη γραμμική αστάθεια που αποτελεί τη βάση του SSP και η τύρβη που αναπτύσσεται είναι αντιπροσωπευτική για τις μεγάλες κλίμακες της ροής και ρεαλιστική (Bretheim et al. 2015, Farrell et al. 2017; 2016, Pausch et al. 2018, Thomas et al. 2015; 2014). Μια επιπλέον ιδιότητα αυτής της προσέγγισης είναι ότι επιτρέπει τον αναλυτικό χαρακτηρισμό των διαταρακτικών δομών που είναι υπεύθυνες για το σχηματισμό και τη συντήρηση του αναγεννητικού κύκλου SSP. Η θεωρία S3T προβλέπει ότι:

- i. η πρώτη ροπή της στατιστικής δυναμικής της τυρβώδους κατάστασης, που ορίζει τη μέση ροή, πρέπει να λαμβάνεται η χρονοεξαρτώμενη μέση ροή που προκύπτει λαμβάνοντας τη χωρική μέση τιμή του πεδίου των ταχυτήτων στη διεύθυνση της χρονικά μέσης ροής,
- ii. η χρονοεξαρτώμενη μέση ροή μίας αυτοσυντηρούμενης S3T τυρβώδους κατάστασης έχει αυστηρά ουδέτερη ευστάθεια, δηλαδή ο μέγιστος χαρακτηριστικός εκθέτης Lyapunov διαταραχών που εξελίσσονται επί αυτής της ροής έχει ακριβώς την τιμή μηδέν,
- iii. οι διαταραχές στην S3T αυτοσυντηρούμενη τυρβώδη κατάσταση είναι γραμμικός συνδυασμός των διανύσματος Lyapunov που αντιστοιχούν στο μηδενικό χαρακτηριστικό εκθέτη και συντηρούν τους στροβίλους,
- iv. η συντήρηση των στροβίλων είναι απόρροια μίας συλλογικής αστάθειας η οποία έχει αναλυτική έκφραση μόνο στη στατιστική διατύπωση της δυναμικής των εξισώσεων Navier-Stokes. Σύμφωνα με την αστάθεια αυτή οι προσανξήσεις της ροής διαμορφώνουν τις διαταραχές ώστε οι στατιστικά μέσες τάσεις Reynolds να διεγείρουν μέσους στροβίλους οι οποίοι ενισχύουν τις προϋπάρχουσες προσανξήσεις. Αυτή η αστάθεια εξηγεί το σχηματισμό του αναγεννητικού κύκλου, καθώς και τη συντήρησή του.

Σε αυτήν την εργασία εξετάζουμε την ακρίβεια των προβλέψεων της S3T στατιστικής δυναμικής δεύτερης τάξης σε DNS τύρβης των εξισώσεων Navier-Stokes.

2. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ

Η μελέτη έγινε σε ασυμπίεστη ροή Couette σε ένα παραλληλεπίπεδο χωρίο διαστάσεων $[L_x, 2, L_z]h$. Η ροή είναι στη θετική διεύθυνση x , ενώ τα τοιχώματα στα $y = \pm h$ κινούνται με ταχύτητα $\pm U_w$ στη διεύθυνση x , και συμβολίζουμε τις κατά πλάτος και μεταξύ των τοιχωμάτων διευθύνσεις με z και y αντίστοιχα. Ο αριθμός Reynolds, Re , της ροής με βάση την ταχύτητα στα τοιχώματα, το ύψος του μισού καναλιού, h , και το συντελεστή του ιξώδους, ν , είναι $Re = hU_w/\nu = 600$.

Ως μέση ροή ορίζουμε τη χωρικά μέση τιμή του πεδίου ταχυτήτων στη x -διεύθυνση

$$\mathbf{U}(y, z, t) = \frac{1}{L_x/h} \int_0^{L_x/h} dx \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

$[L_x, L_z]/h$	$N_x \times N_z \times N_y$	Re_τ	$[L_x^+, L_z^+]$
$[1.75\pi, 1.2\pi]$	$33 \times 33 \times 49$	45.0	$[247, 170]$

Πίνακας 1: $[L_x, L_z]/h$ είναι οι διαστάσεις του χωρίου στην x και z διεύθυνση. N_x, N_z ο αριθμός των ενεργών αρμονικών Fourier του DNS, δηλαδή ο αριθμός των αρμονικών που απομένουν μετά από φιλτράρισμα (dealiasing) με τον κανόνα των $2/3$. N_y ο αριθμός των σημείων στην y διεύθυνση. $Re_\tau = u_\tau h/\nu$ είναι ο αριθμός Reynolds στην τυρβώδη κατάσταση βασισμένος στη ταχύτητα τριβής, $u_\tau^2 = \nu dU_{turb}/dy|_{y=h}$, όπου $U_{turb}(y)$ η χρονικά μέση ταχύτητα. $[L_x^+, L_z^+]$ οι διαστάσεις του χωρίου σε μονάδες ν/u_τ (wall units).

και ως διαταραχές $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ τη διαφορά του συνολικού πεδίου ταχυτήτων $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ από τη μέση ροή, $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{U}(y, z, t)$. Τη δυναμική των διαταραχών και της μέσης ροής από την παραπάνω ανάλυση διέπει η προβολή της εξίσωσης Navier-Stokes στις 2 συνιστώσες \mathbf{U} και \mathbf{u}' ,

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} + \nabla P - \Delta \mathbf{U}/Re = -\langle \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' \rangle_x, \quad (2\alpha')$$

$$\partial_t \mathbf{u}' + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{U} + \nabla p' - \Delta \mathbf{u}'/Re = -\underbrace{(\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' - \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' \rangle_x)}_N, \quad (2\beta')$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (2\gamma')$$

Στο παραπάνω σύστημα εξισώσεων ως P, p' αναφέρονται οι αδιάστατες πιέσεις και ως $\langle \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' \rangle_x$ η μέση τιμή στη x -διεύθυνση του μη γραμμικού όρου των αλληλεπιδράσεων στο πεδίο των διαταραχών. Στις αδιάστατες παραπάνω εξισώσεις ως μονάδα μήκους έχει ληφθεί το h , ως μονάδα ταχύτητας το U_w , ως μονάδα χρόνου το h/U_w , και ως μονάδα πίεσης το ρU_w^2 όπου ρ η σταθερή πυκνότητα του ρευστού. Τα πεδία ταχυτήτων ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες: $\mathbf{U}(\pm h, z, t) = (\pm U_w, 0, 0)$, $\mathbf{u}'(x, \pm h, z, t) = 0$, $\mathbf{U}(y, 0, t) = \mathbf{U}(y, L_z, t)$, $\mathbf{u}'(0, y, z, t) = \mathbf{u}'(L_x, y, z, t)$ και $\mathbf{u}'(x, y, 0, t) = \mathbf{u}'(x, y, L_z, t)$. Λόγω της συνέχειας οι y και z συνιστώσες της μέσης ροής $\mathbf{U} = (U, V, W)$, προσδιορίζονται από τη ρευματοσυνάρτηση Ψ μέσω των σχέσεων $V = -\partial_z \Psi$, $W = \partial_y \Psi$ αντίστοιχα. Οι εξισώσεις αυτές επιλύονται με τη διακριτοποίηση και γεωμετρία που προσδιορίζεται στον Πίν. 1.

Για να υπολογίσουμε τους εκθέτες Lyapunov και τις αντίστοιχες διευθύνσεις Lyapunov παράλληλα με την εξέλιξη της ροής εξελίσσουμε ένα πεδίο ταχυτήτων \mathbf{v} που ικανοποιεί το γραμμικό τμήμα της (2β') (το αριστερό σκέλος της (2β')) με το μέσο πεδίο ταχυτήτων, \mathbf{U} , που προκύπτει από το DNS της (2), και ικανοποιεί δηλαδή τη γραμμική εξίσωση:

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{U} + \nabla p - \Delta \mathbf{v}/Re = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3)$$

με τις συνοριακές συνθήκες του \mathbf{u}' . Η εξίσωση (3) προσδιορίζει την εκθετική ευστάθεια της χρονοεξάρτητης ροής $\mathbf{U}(y, z, t)$.

Ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov του \mathbf{v}' ορίζεται ως:

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |\mathbf{v}'|}{t}, \quad (4)$$

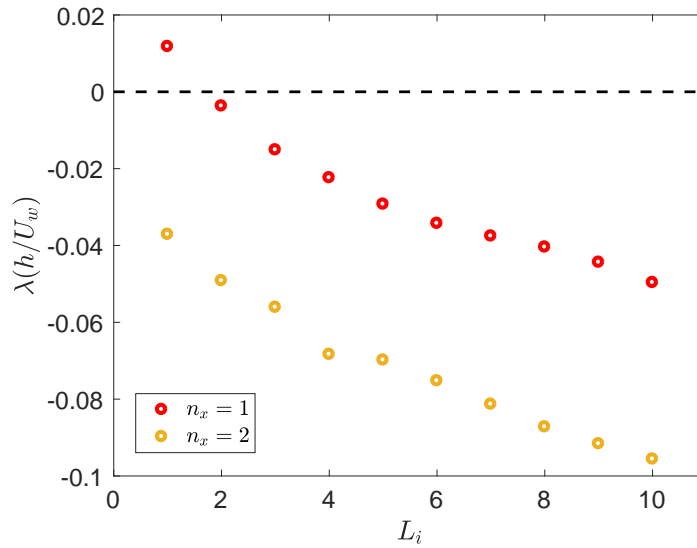
και ο δείκτης 1 υποδηλώνει ότι είναι ο μεγαλύτερος εκθέτης¹. Η χρονοεξαρτώμενη ροή στην οποία συγκλίνουν όλες οι αρχικές συνθήκες και αυξάνεται με τον εκθέτη λ_1 ορίζει τη διεύθυνση Lyapunov της ροής \mathbf{U} , την οποία συμβολίζουμε με L_1 . Η διεύθυνση αυτή μετά την πάροδο αρκετού χρονικού

¹Σημειώστε ότι αυτός ο εκθέτης Lyapunov προσδιορίζει την ασυμπτωτική εκθετική αύξηση των διαταραχών επί της δεδομένης ροής \mathbf{U} και χαρακτηρίζει την υδροδυναμική ευστάθεια της χρονοεξαρτώμενης ροής \mathbf{U} . Δεν αφορά στην εκθετική αύξηση διαταραχών στο πλήρες πεδίο ταχυτήτων, \mathbf{u} , και δεν προσδιορίζει την ευαισθησία της όλης εξέλιξης της τυρβώδους κατάστασης σε διαταραχές των αρχικών συνθηκών και δεν χαρακτηρίζει την χαοτικότητα της όλης ροής.

διαστήματος εξαρτάται μόνο από το t και δεν εξαρτάται από την αρχική κατάσταση του συστήματος (όλες οι αρχικές συνθήκες συγκλίνουν σε αυτή βλ. Farrell and Ioannou (1996))². Έχοντας προσδιορίσει τη χρονοεξαρτώμενη διεύθυνση L_1 της \mathbf{U} , μπορούμε εξελίσσοντας την (3) κάθε χρονική στιγμή στον αντίστοιχο υποχώρο $L_1^\perp(t)$, στον υποχώρο δηλαδή που ορίζεται από τις διευθύνσεις που είναι κάθετες στο $L_1(t)$, να προσδιορίσουμε τον δεύτερο εκθέτη Lyapunov:

$$\lambda_2 = \lim_{t \rightarrow \infty, \mathbf{v}' \in L_1^\perp} \frac{\log |\mathbf{v}'|}{t}, \quad (5)$$

και την αντίστοιχη χρονοεξαρτώμενη διεύθυνση Lyapunov, L_2 , στην οποία συγκλίνουν κάθε χρονική στιγμή t όλες οι διαταραχές που είναι στους υποχώρους L_1^\perp στους παρελθόντες χρόνους. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να προσδιορίσουμε το πλήρες φάσμα των εκθετών Lyapunov διαταραχών που εξελίσσονται στη ροή \mathbf{U} , με την αντίστοιχη πλήρη ορθογώνια³ χρονοεξαρτώμενη βάση διευθύνσεων Lyapunov, L_i , στην οποία μπορεί να αναλυθούν οι διαταραχές που προκύπτουν από το DNS των εξισώσεων (2). Στο κλείσιμο δεύτερης τάξης, στο οποίο εδράζεται η στατιστική δυναμική S3T, ο όρος N στο δεξί σκέλος της εξίσωσης (2β') μηδενίζεται και συνεπώς το διαταρακτικό πεδίο, \mathbf{u}' , σε αυτή την προσέγγιση συγκλίνει στο \mathbf{v}' , και εφόσον η τύρβη αυτοσυντηρείται, δηλαδή το πεδίο ταχυτήτων είναι πεπερασμένο και μη μηδενικό, θα πρέπει αναγκαστικά $\lambda_1 = 0$ και η τύρβη να διατηρείται με διαταρακτικό πεδίο περιορισμένο μόνο στον υποχώρο που σχηματίζει το L_1 . Στο DNS το διαταρακτικό πεδίο δεν περιορίζεται μόνο στο L_1 και έχει προβολές στην πλήρη βάση των L_i . Το ερώτημα που θα διερευνηθεί είναι κατά πόσον η κυρίαρχη δυναμική της τυρβώδους ροής διαδραματίζεται από τα πρώτα L_i .



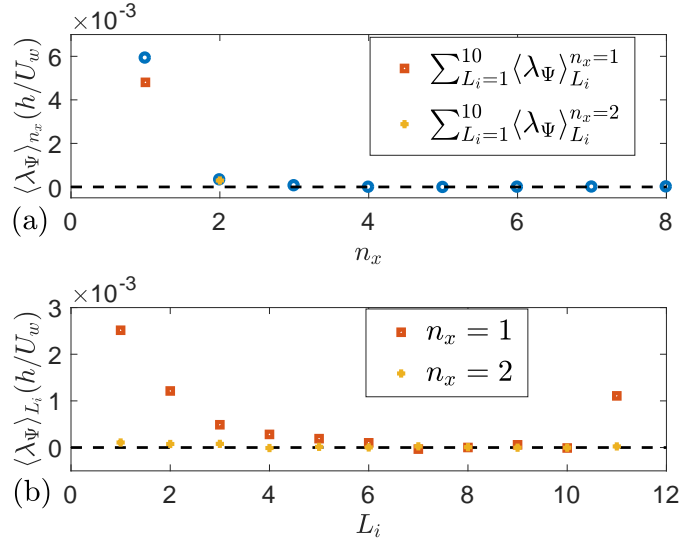
Σχήμα 1: Εκθέτης Lyapunov των 10 λιγότερο ευσταθών διευθύνσεων Lyapunov της μέσης ροής \mathbf{U} με κυματαριθμούς $k_x = 2\pi n_x/L_x$. Στο χωρίο που εξετάζουμε συντηρείται μόνο μια ασταθής διεύθυνση.

3. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΑΣ ΤΩΝ ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΩΝ LYAPUNOV ΣΤΗ ΣΥΝΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΡΟΗΣ

Οι τιμές των πρώτων 20 εκθετών Lyapunov της μέσης ροής \mathbf{U} που προκύπτει στο DNS τυρβώδους ροής Couette στα $Re = 600$ στη γεωμετρία του Πιν. 1 δίνονται στο γράφημα του Σχ. 1. Επειδή η μέση ροή \mathbf{U} είναι ανεξάρτητη από τη συντεταγμένη x , κάθε διεύθυνση Lyapunov χαρακτηρίζεται από ένα κυματαριθμό $k_x = 2\pi n_x/L_x$. Στο Σχ. 1 παρουσιάζονται οι εκθέτες των 10 πλέον ασταθών διευθύνσεων

²Έχουμε θεωρήσει ότι δεν υπάρχει εκφυλισμός.

³Το εσωτερικό γινόμενο που χρησιμοποιούμε είναι το εσωτερικό γινόμενο των ταχυτήτων: $\int dV \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2$. Τα L_i εξαρτώνται από τη επιλογή του εσωτερικού γινομένου. Οι τιμές, όμως, των εκθετών λ_i δεν εξαρτώνται από το εσωτερικό γινόμενο.



Σχήμα 2: (a): Μέσος εκθέτης αύξησης της ρευματοσυνάρτησης του μέσου στροβίλου $\langle \lambda_\Psi \rangle$ από τους πρώτους 8 κυματαριθμούς της ροής (μπλέ κύκλοι), ενώ το κόκκινο τετράγωνο και ο κίτρινος σταυρός συμβολίζουν το άθροισμα από τις πρώτες 10 διευθύνσεις για τη $n_x = 1$ και τη $n_x = 2$ αρμονική αντίστοιχα. (b): Αύξηση που οφείλεται στην προβολή του πεδίου ροής στις διευθύνσεις Lyapunov των δυο πρώτων κυματαριθμών. Ως ενδέκατη διεύθυνση L_{11} ορίζουμε το σύνολο του πεδίου που δεν περιέχεται στις δέκα πρώτες διευθύνσεις.

Lyapunov στους κυματαριθμούς με αρμονικές $n_x = 1, 2$. Στο χωρίο που εξετάζουμε συντηρείται μόνο μία ολίγο ασταθής διεύθυνση. Εάν η διεύθυνση αυτή εμπλέκεται στη δυναμική του DNS τότε η θετικότητα του εκθέτη είναι αναγκαία ώστε η πρωτεύουσα διεύθυνση αυτή να μπορεί να συντηρηθεί δεδομένου ότι τροφοδοτεί τις άλλες αρμονικές της ροής μέσω του μη γραμμικού όρου N της εξίσωσης ($2\beta'$).

Θεωρούμε τώρα τη συνεισφορά των διευθύνσεων Lyapunov στη συντήρηση του μέσου στροβιλισμού Ω_x στη διεύθυνση της μέσης ροής. Ο στροβιλισμός $\Omega_x = \Delta_h \Psi$, όπου $\Delta_h \equiv \partial_y^2 + \partial_z^2$ και Ψ η ρευματοσυνάρτηση του μέσου στροβίλου με ταχύτητες V και W , ικανοποιεί την εξίσωση:

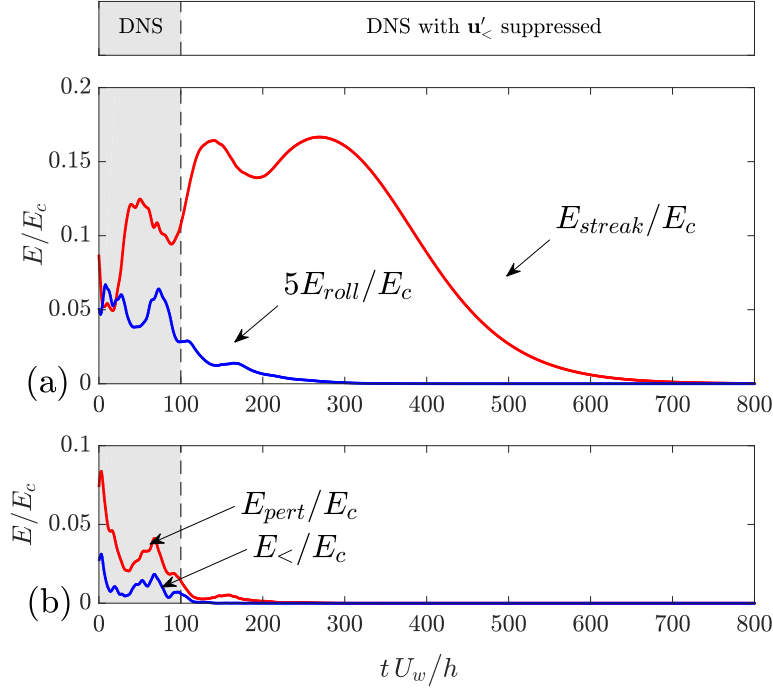
$$\partial_t \Psi = \underbrace{-\Delta_h^{-1} (V \partial_y + W \partial_z) \Psi}_A + \underbrace{\nu \Delta_h \Psi}_D - \underbrace{\Delta_h^{-1} [(\partial_y^2 - \partial_z^2) \langle v' w' \rangle_x + \partial_{yz} (\langle w'^2 \rangle_x - \langle v'^2 \rangle_x)]}_{G_{\mathbf{u}'}} , \quad (6)$$

όπου Δ_h^{-1} είναι η αντίστροφος της Δ_h και v', w' οι y και z συνιστώσες του \mathbf{u}' . Οι όροι A και D δεν συμβάλλουν στη συντήρηση του πεδίου ταχυτήτων του στροβίλου που χαρακτηρίζεται με την Ψ δεδομένου ότι ο μιν A είναι όρος μεταφοράς, ο δε D ανάλωσης. Η μέση στροβιλότητα δηλαδή μπορεί να προκύψει και συντηρηθεί μόνο με θετική συνεισφορά των τάσεων Reynolds των διαταραχών, δηλαδή μόνον όταν η χρονικά μέση τιμή του $\int_V \Psi G_{\mathbf{u}'} dV$ είναι θετική. Η συνεισφορά του διαταρακτικού πεδίου \mathbf{u}' τη χρονική στιγμή t στη συντήρηση της ρευματοσυνάρτησης του μέσου στροβίλου μπορεί να εκτιμηθεί με τον εκθέτη:

$$\lambda_\Psi(\mathbf{u}') = \frac{\int_V \Psi G_{\mathbf{u}'} dV}{2 \int_V \Psi^2 dV} , \quad (7)$$

και η ολική συνεισφορά από την χρονικά μέση τιμή $\langle \lambda_\Psi(\mathbf{u}') \rangle$.

Πρώτα αναλύουμε τις διαταραχές στις x αρμονικές συνιστώσες, δηλαδή $\mathbf{u}' = \sum_{i=1}^{N_x} \mathbf{u}'_{n_x}$, και υπολογίζουμε τον αντίστοιχο μέσο εκθέτη $\langle \lambda_\Psi(\mathbf{u}'_{n_x}) \rangle$ που αντιστοιχεί σε καθεμιά αρμονική συνιστώσα του πεδίου \mathbf{u}' στην αρμονική n_x με κυματαριθμό $k_x = 2\pi n_x / L_x$ (βλ. Σχ. 2α). Από αυτό προκύπτει ότι μόνο η πρώτη αρμονική $n_x = 1$ του \mathbf{u}' είναι δυναμικά ενεργός στη διατήρηση του στροβίλου, και συνεπώς του αναγεννητικού κύκλου και της τυρβώδους κατάστασης (βλ. Σχ. 2α). Αυτό είναι συμβατό με την τυρβώδη



Σχήμα 3: (a): Εξέλιξη της ενέργειας των προσανυξήσεων E_{streak} , και της ενέργειας των στροβίλων E_{roll} (5 φορές μεγαλύτερη). Στο χρόνο $t = 100h/U_w$ η συνιστώσα, $\mathbf{u}'_{<}$, του πεδίου ταχυτήτων που προβάλλεται στον υπόχωρο των τεσσάρων πρώτων διευθύνσεων Lyapunov αφαιρείται βαθμιαία από το πεδίο διαταραχών. (b): Ενέργεια των διαταραχών E_{pert} και ενέργεια της συνιστώσας του πεδίου ταχυτήτων στις πρώτες 4 προεξάρχουσες διευθύνσεις Lyapunov $E_{<}$. Όλες οι ενέργειες κανονικοποιούνται με βάση την ενέργεια στρωτής ροής, $E_c = \int_{-1}^1 dy (U_w y)^2 / 2$.

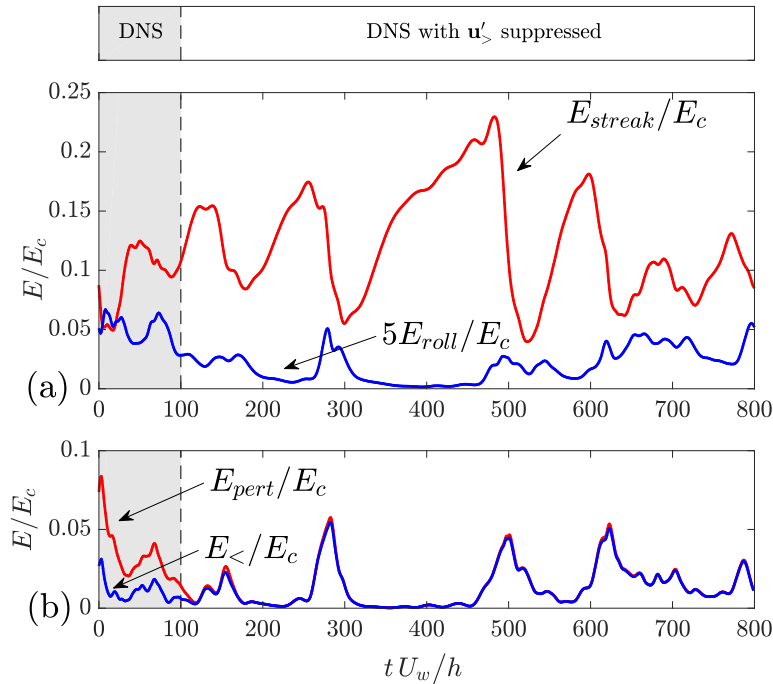
κατάσταση που συντηρείται στην S3T δυναμική στην οποία το διαταρακτικό πεδίο περιορίζεται μόνο στην αρμονική $n_x = 1$.

Αναλύοντας τώρα το διαταρακτικό πεδίο στις διευθύνσεις Lyapunov L_i , $\mathbf{u}' = \sum \mathbf{u}'_{L_i}$, υπολογίζουμε τη μέση συμβολή των πρώτων \mathbf{u}'_{L_i} στη συντήρηση της ρευματοσυνάρτησης (βλ. Σχ. 2β). Είναι εμφανές ότι ο αναγεννητικός κύκλος συντηρείται σχεδόν εξ ολοκλήρου από τις πρώτες δύο διευθύνσεις Lyapunov. Για να δείξουμε τη σημασία αυτών των διευθύνσεων θα εκτελέσουμε δύο πειράματα. Αναλύουμε το διαταρακτικό πεδίο σε δύο ορθογώνια πεδία

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u}'_{<} + \mathbf{u}'_{>} , \quad (8)$$

όπου $\mathbf{u}'_{<}$ είναι η προβολή του \mathbf{u}' στις πρώτες 4 προεξάρχουσες διευθύνσεις Lyapunov, όλες με $n_x = 1$, και $\mathbf{u}'_{>}$ η προβολή στις υπόλοιπες διευθύνσεις. Στο πρώτο πείραμα καταστέλλουμε σταδιακά το $\mathbf{u}'_{<}$, αφαιρώντας τις διαταραχές που ευθύνονται για τη συντήρηση των μέσων στροβίλων.

Το γράφημα της εξέλιξης της ενέργειας των προσανυξήσεων $E_{streak} = \int_{-1}^1 dy \int_0^{L_z} dz (U - \langle U \rangle_z)^2 / (4L_z)$, όπου U η x συνιστώσα της μέσης ταχύτητας \mathbf{U} και $\langle U \rangle_z$ η μέση τιμή της στη διεύθυνση z , της ενέργειας των μέσων στροβίλων $E_{roll} = \int_{-1}^1 dy \int_0^{L_z} dz (V^2 + W^2)^2 / (4L_z)$, όλων των διαταραχών $E_{pert} = \int_V dV |\mathbf{u}'|^2 / (4L_x L_z)$ καθώς και η ενέργεια του τμήματος των διαταραχών που βρίσκεται στον υποχώρο των πρώτων 4 διευθύνσεων Lyapunov $E_{<} = \int_V dV |\mathbf{u}'_{<}|^2 / (4L_x L_z)$ παρουσιάζεται στο Σχ. 3. Η αφαίρεση των διαταραχών που υποστηρίζουν τους στροβίλους καθιστά τη ροή στρωτή. Η ενέργεια που εμπεριέχεται στις 4 πρώτες διευθύνσεις Lyapunov είναι περί το 30% της συνολικής ενεργειας των διαταραχών. Εάν αντίθετως επιβάλλουμε ομοίμορφη μείωση της ενέργειας των διαταραχών κατά το ίδιο ποσοστό δεν παρατηρούμε στρωματοποίηση της ροής. Στο Σχ. 4 παρουσιάζεται το αντίστοιχο πείραμα στο οποίο καταστέλλουμε την $\mathbf{u}'_{>}$ αφαιρώντας τον υπόχωρο που περιέχεται 70% της ενέργειας των διαταραχών. Παρά



Σχήμα 4: (a,b): Όπως στο Σχ. 3, με την $\mathbf{u}'_{>}$ συνιστώσα να αφαιρείται με την ίδια διαδικασία από το πεδίο διαταραχών. Η τύρβη συντηρείται από ένα πεδίο διαταραχών που αποτελείται κατά κύριο λόγο από την πρώτη διεύθυνση Lyapunov της χρονοεξαρτώμενης μέσης ροής.

την παρέμβαση αυτή η ροή προσαρμόζεται και παραμένει τυρβώδης.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από την ανάλυση του πεδίου διαταραχών στις Lyapunov συνιστώσες του δείχνουμε ότι το πεδίο διαταραχών συντηρείται λόγω της χρονικής εξάρτησης της μέσης ροής που προκαλεί την εμφάνιση ασταθών διευθύνσεων, οι αλληλεπιδράσεις που αφορούν τη συντήρηση των στροβίλων περιέχονται σε έναν υπόχωρο του πεδίου διαταραχών που ορίζεται από τις πρώτες διευθύνσεις Lyapunov και τέλος ότι η ελαχιστοποίηση της προβολής του πεδίου διαταραχών σε αυτές ακριβώς τις διευθύνσεις Lyapunov οι οποίες είναι υπεύθυνες για τη συντήρηση της ρευματοσυνάρτησης οδηγεί στη στρωματοποίηση της ροής. Τα συμπεράσματα αυτά είναι συμβατά με τις προβλέψεις της στατιστικής δυναμικής της τυρβώδους ροής με κλείσιμο δεύτερης τάξης.

Αναφορές

- Adrian, R. J. (2007) Hairpin vortex organization in wall turbulence. *Phys. Fluids*, **19** (4), 041 301.
- Bakewell Jr., H. P. and L. Lumley (1967) Viscous sublayer and adjacent wall region in turbulent pipe flow. *Phys. Fluids*, **10** (9), 1880–1889.
- Bretheim, J. U., C. Meneveau, and D. F. Gayme (2015) Standard logarithmic mean velocity distribution in a band-limited restricted nonlinear model of turbulent flow in a half-channel. *Phys. Fluids*, **27**, 011 702.
- Farrell, B. F., D. F. Gayme, and P. J. Ioannou (2017) A statistical state dynamics approach to wall-turbulence. *Phil. Trans. R. Soc. A*, **375** (2089), 20160 081.
- Farrell, B. F. and P. J. Ioannou (1996) Generalized stability. Part II: Non-autonomous operators. *J. Atmos. Sci.*, **53**, 2041–2053.
- Farrell, B. F. and P. J. Ioannou (2012) Dynamics of streamwise rolls and streaks in turbulent wall-bounded shear flow. *J. Fluid Mech.*, **708**, 149–196.

- Farrell, B. F. and P. J. Ioannou (2017) Statistical state dynamics-based analysis of the physical mechanisms sustaining and regulating turbulence in Couette flow. *Phys. Rev. Fluids*, **2** (8), 084 608.
- Farrell, B. F., P. J. Ioannou, J. Jiménez, N. C. Constantinou, A. Lozano-Durán, and M.-A. Nikolaidis (2016) A statistical state dynamics-based study of the structure and mechanism of large-scale motions in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, **809**, 290–315.
- Hamilton, K., J. Kim, and F. Waleffe (1995) Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures. *J. Fluid Mech.*, **287**, 317–348.
- Jiménez, J. (1994) On the structure and control of near wall turbulence. *Phys. Fluids*, **6**, 944–953.
- Jiménez, J. and P. Moin (1991) The minimal flow unit in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, **225**, 213–240.
- Jiménez, J. and A. Pinelli (1999) The autonomous cycle of near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, **389**, 335–359.
- Kim, J., S. J. Kline, and W. C. Reynolds (1971) The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, **50**, 133–160.
- Kim, J., P. Moin, and R. Moser (1987) Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, **177**, 133–166.
- Kline, S. J., W. C. Reynolds, F. A. Schraub, and P. W. Runstadler (1967) The structure of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, **30**, 741–773.
- Pausch, M., Q. Yang, Y. Hwang, and B. Eckhardt (2018) Quasilinear approximation for exact coherent states in parallel shear flows. *Fluid Dyn. Res.*, (In press).
- Schoppa, W. and F. Hussain (2000) Coherent structure dynamics in near-wall turbulence. *Fluid Dyn. Res.*, **26**, 119–139.
- Schoppa, W. and F. Hussain (2002) Coherent structure generation in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, **453**, 57–108.
- Thomas, V., B. F. Farrell, P. J. Ioannou, and D. F. Gayme (2015) A minimal model of self-sustaining turbulence. *Phys. Fluids*, **27**, 105 104.
- Thomas, V., B. K. Lieu, M. R. Jovanović, B. F. Farrell, P. J. Ioannou, and D. F. Gayme (2014) Self-sustaining turbulence in a restricted nonlinear model of plane Couette flow. *Phys. Fluids*, **26**, 105 112.
- Waleffe, F. (1997) On a self-sustaining process in shear flows. *Phys. Fluids*, **9**, 883–900.

Identification of perturbations that maintain the streamwise vortices in turbulent Couette flow

Marios-Andreas Nikolaidis* και Petros J. Ioannou

Physics Department, National & Kapodistrian University of Athens, Athens

* e-mail: mnikolaidis@phys.uoa.gr

Abstract

Near-wall turbulence in shear flows is maintained by transfer of mean kinetic energy to perturbations. The mechanism responsible for this transfer and the feedback from perturbations to the mean flow are fundamental questions that have not reached definitive conclusions. In this work we show the central role of Lyapunov vectors, structures that are parametrically maintained through their interaction with the time-dependent streamwise-mean flow that also includes rolls and streaks. These Lyapunov vectors generate vorticity forcing that maintains the rolls, the rolls maintain the streaks, and the streaks are responsible for the parametric destabilization of the Lyapunov vectors. This result leads to the identification of structures in the perturbation field that are responsible for the maintenance of the regeneration cycle and through it of the turbulence. We also show direct numerical simulations in which suppression of this Lyapunov subspace leads to laminarization in a Reynolds number $Re=600$ Couette flow.

Keywords: turbulent flow, flow control