

Μελέτη της ευστάθειας διαστρωματωμένης διατμητικής ροής σε τρισδιάστατες διαταραχές χωρίς την προσέγγιση Boussinesq

Ευάγγελος Στασινός και Νικόλαος Α. Μπάκας
Εργαστήριο Μετεωρολογίας, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
e-mail: nbakas@uoi.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διαστρωματωμένη δυναμική αστάθεια είναι μια κυρίαρχη διαδικασία στην ατμόσφαιρα και τον ωκεανό που παράγει τύρβη και ανάμειξη. Αν και οι συνθήκες κάτω από τις οποίες εμφανίζεται, τα χαρακτηριστικά της και η εξέλιξή της έχουν μελετηθεί εκτενώς, οι μελέτες βασίζονται στην προσέγγιση Boussinesq σύμφωνα με την οποία όταν η μέση πυκνότητα μεταβάλλεται αργά με το ύψος, η βαθμίδα της λαμβάνεται υπόψη μόνο στη δύναμη της άνωσης. Όμως η προσέγγιση αυτή δεν ικανοποιείται πάντα. Στην εργασία αυτή μελετάται η αστάθεια διαστρωματωμένης διατμητικής ροής σε τρισδιάστατες διαταραχές χωρίς τη χρήση της προσέγγισης Boussinesq. Υπολογίζεται αριθμητικά ο ρυθμός εκθετικής αύξησης των διαταραχών καθώς και η δομή τους και συγκρίνεται με τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά της αστάθειας υπό την προσέγγιση Boussinesq. Βρέθηκε ότι οι πιο ασταθείς δομές είναι διδιάστατες σε όλο το εύρος των οριζόντιων κυματάρθμων για τους οποίους έχουμε αστάθεια, αποτέλεσμα που έρχεται σε συμφωνία με το θεώρημα του Squire. Ο ρυθμός εκθετικής αύξησης βρέθηκε μειωμένος σε σχέση με το όριο της ισχύος της προσέγγισης Boussinesq, ενώ οι πιο ασταθείς δομές έχουν μικρότερη κλίμακα. Τέλος βρέθηκε ότι η ικανή συνθήκη του Miles για αστάθεια (ότι ο αριθμός Richardson $Ri < 1/4$), ισχύει και στην περίπτωση που η βαθμίδα της μέσης πυκνότητας λαμβάνεται πλήρως υπόψη.

Λέξεις Κλειδιά: δυναμική αστάθεια διαστρωματωμένης ροής, προσέγγιση Boussinesq

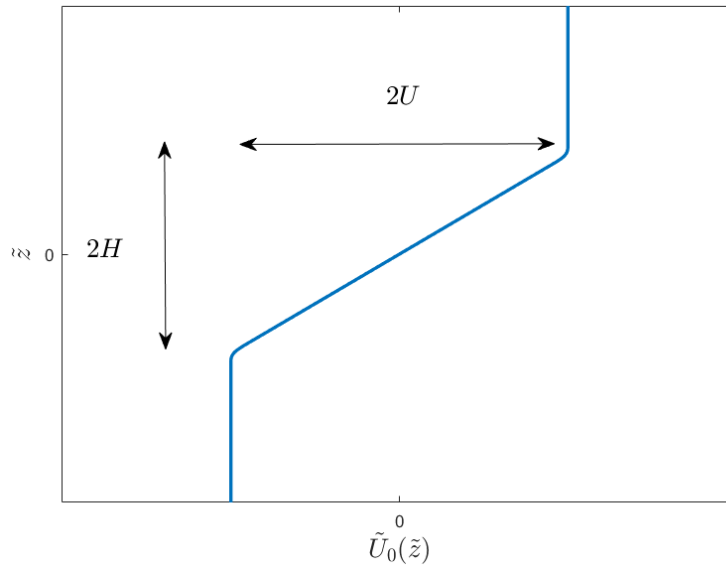
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δυναμική αστάθεια είναι μια από τις κυρίαρχες διαδικασίες παραγωγής τύρβης και ανάμειξης στην ατμόσφαιρα και τον ωκεανό (Lindzen 1974; Wunsch and Ferrari, 2004). Έτσι εδώ και έναν αιώνα περίπου, ένας μεγάλος αριθμός θεωρητικών, αριθμητικών και πειραματικών εργασιών έχει αφιερωθεί στη μελέτη της (Lin 1955; Drazin and Reid 1981). Οι θεωρητικές μελέτες της δυναμικής αστάθειας συνήθως χρησιμοποιούν την προσέγγιση Boussinesq, σύμφωνα με την οποία η χωρική εξάρτηση της μέσης πυκνότητας στο ρευστό λαμβάνεται υπόψη μόνο στη δύναμη της άνωσης. Η προσέγγιση αυτή είναι ακριβής όταν η χωρική κλίμακα αλλαγής της πυκνότητας είναι πολύ μεγαλύτερη από το εύρος της διατμητικής ροής. Προηγούμενες εργασίες που βασίστηκαν στην προσέγγιση Boussinesq, ταυτοποίησαν τον αριθμό Richardson σαν τη μόνη παράμετρο που επηρεάζει σημαντικά τη δυναμική. Συγκεκριμένα, ο Miles (1961) ανέλυσε την εξίσωση Taylor-Goldstein που διέπει την ευστάθεια γραμμικών διαταραχών σε μια ευσταθώς διαστρωματωμένη διατμητική ροή και έδειξε ότι όταν ο αριθμός Richardson είναι μεγαλύτερος από $1/4$, τότε η ροή είναι γραμμικά ευσταθής. Όταν είναι μικρότερος από την τιμή αυτή, τότε μικρές διαταραχές μπορεί να μεγαλώσουν εκθετικά γρήγορα και να οδηγήσουν σε κατάρρευση της διατμητικής ροής και σε ανάμειξη. Όμως συχνά, οι χωρικές μεταβολές της μέσης πυκνότητας μπορεί να είναι μεγάλες μέσα στο εύρος της διατμητικής

ροής με αποτέλεσμα η προσέγγιση Boussinesq να μην είναι ακριβής. Στην παρούσα εργασία, εξετάζουμε τη γραμμική ευστάθεια μιας παράλληλης διατμητικής ροής σε τρισδιάστατες διαταραχές λαμβάνοντας υπόψη πλήρως τις χωρικές αλλαγές της μέσης πυκνότητας. Αναλύουμε τα χαρακτηριστικά της εκθετικής αστάθειας και συγκρίνουμε με τα χαρακτηριστικά της αστάθειας αν στη δυναμική ληφθεί η προσέγγιση Boussinesq ώστε να αναδείξουμε την επιρροή της χωρικής αλλαγής της πυκνότητας στη δυναμική αστάθεια.

2. ΕΞΕΛΙΞΗ ΜΙΚΡΩΝ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ

Θεωρούμε ένα ευσταθώς διαστρωματωμένο, ασυμπίεστο και άτριβο ρευστό με πυκνότητα $\tilde{\rho}_0(\tilde{z}) = \bar{\rho} e^{-N^2 \tilde{z}/g}$, όπου N η συχνότητα Brunt-Vaissala, g η επιτάχυνση της βαρύτητας και \tilde{z} η κατακόρυφη συντεταγμένη. Στο ρευστό που είναι υδροστατικά ισορροπημένο από πίεση $\tilde{p}_0(\tilde{z})$ υπάρχει παράλληλη ροή με ταχύτητα $\tilde{U}_0(\tilde{z})$ στην κατεύθυνση \tilde{x} που φαίνεται στο Σχήμα 1. Οι γραμμικοποιημένες



Σχήμα 1. Προφίλ της διατμητικής ροής $\tilde{U}_0(\tilde{z})$.

εξισώσεις που διέπουν την εξέλιξη μικρών τρισδιάστατων διαταραχών γύρω από τη ροή στην ισορροπία είναι:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\right) \tilde{u}_x + \frac{d\tilde{U}_0}{d\tilde{z}} \tilde{u}_z = -\frac{1}{\tilde{\rho}_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}}, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\right) \tilde{u}_y = -\frac{1}{\tilde{\rho}_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}}, \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\right) \tilde{u}_z = -\frac{1}{\tilde{\rho}_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} - g \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_0}, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\right) \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_0} - N^2 \tilde{u}_z = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} = 0. \quad (5)$$

Αδιαστατοποιούμε τις εξισώσεις χρησιμοποιώντας τη μέγιστη ταχύτητα U ως κλίμακα ταχύτητας, την έκταση της περιοχής διάτμησης H ως κλίμακα μήκους, το χρόνο μεταφοράς H/U ως κλίμακα χρόνου, το $\bar{\rho}U^2$ ως κλίμακα πίεσης και το HN^2 ως κλίμακα πυκνότητας. Έτσι οι αδιάστατες εξισώσεις που διέπουν την εξέλιξη των διαταραχών (χωρίς περισπωμένες) είναι:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) u_x + \frac{dU_0}{dz} u_z = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) u_y = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) u_z = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - Rib, \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) b = u_z, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (10)$$

όπου $b = \rho/\rho_0$ είναι η διαταραχή της άνωσης, η αδιάστατη μέση πυκνότητα είναι $\rho_0(z) = (\bar{\rho}/HN^2)e^{-Sz}$, $S = HN^2/g$ είναι ο αδιάστατος λόγος του πάχους διάτμησης προς το ύψος μέσα στο οποίο μειώνεται η μέση πυκνότητα και $Ri = H^2N^2/U^2$ είναι ο αριθμός Richardson. Στην προσέγγιση Boussinesq, ο λόγος S θεωρείται πολύ μικρός. Το αποτέλεσμα είναι ότι όροι που αφορούν τη βαθμίδα της μέσης πυκνότητας είναι αντιστοίχως μικροί ($d\rho_0/dz \sim S \ll 1$) και αγνοούνται στη δυναμική.

Μπορούμε να μειώσουμε τη διάσταση του συστήματος των ΜΔΕ ως εξής. Από τις (1)-(2) και χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας (5), βρίσκουμε την εξίσωση που διέπει την εξέλιξη της z-συνιστώσας του στροβιλισμού $\zeta = \partial_x u_y - \partial_y u_x$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \zeta = \frac{dU_0}{dz} \frac{\partial u_z}{\partial y}. \quad (11)$$

Παίρνοντας την απόκλιση της διανυσματικής εξίσωσης εξέλιξης της ορμής και χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας βρίσκουμε τη διαγνωστική εξίσωση για την πίεση:

$$\left(\nabla^2 + S \frac{\partial}{\partial z}\right) p = -2\rho_0 \frac{dU_0}{dz} \frac{\partial u_z}{\partial x} - \rho_0 Ri \frac{\partial b}{\partial z}. \quad (12)$$

Παίρνοντας τη Λαπλασιανή της (8) και χρησιμοποιώντας τη (12) και την παράγωγο της (8) ως προς z , μπορούμε να απαλείψουμε την πίεση για να πάρουμε την εξίσωση για την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla_S^2 u_z - \left(\frac{d^2 U_0}{dz^2} - S \frac{dU_0}{dz}\right) \frac{\partial u_z}{\partial x} = -Ri \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) b, \quad (13)$$

όπου $\nabla_S^2 = \nabla^2 - S \partial_z$. Οι εξισώσεις (9), (11), (13) είναι ένα κλειστό σύστημα ΜΔΕ που διέπει την εξέλιξη των διαταραχών. Για την επίλυσή του θεωρούμε κυματικές λύσεις της μορφής $(\zeta, u_z, b) = (\hat{\zeta}, \hat{u}_z, \hat{b})e^{ikx+ily}$, και γράφουμε το σύστημα στη συνοπτική μορφή

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \hat{\zeta} \\ \hat{u}_z \\ \hat{b} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \hat{\zeta} \\ \hat{u}_z \\ \hat{b} \end{pmatrix},$$

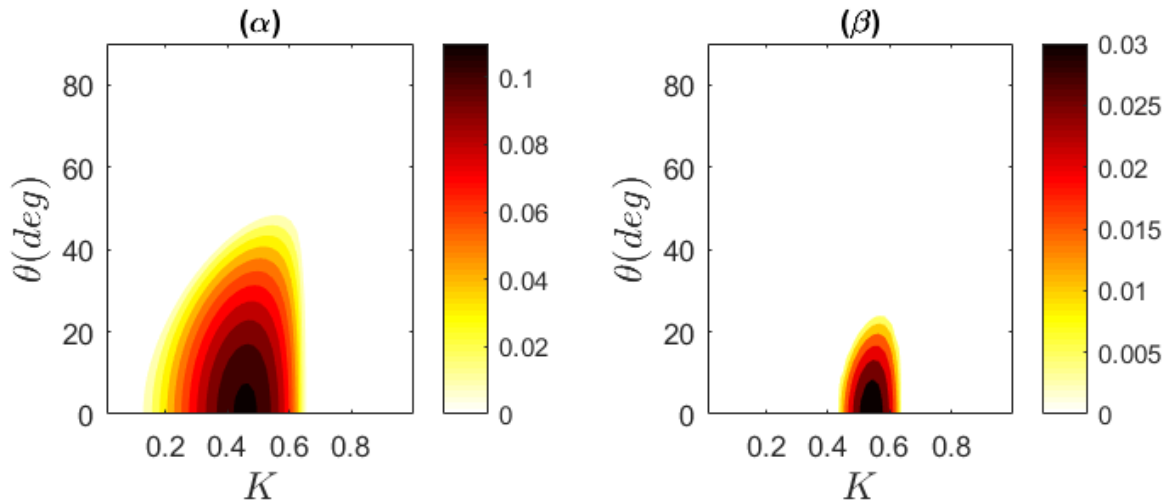
όπου

$$A = \begin{pmatrix} -ikU_0 & iU_0' & 0 \\ 0 & -ik\nabla_S^{-2}[U_0\nabla_S^2 + SU_0' - U_0''] & K^2 Ri\nabla_S^{-2} \\ 0 & 1 & -ikU_0 \end{pmatrix},$$

είναι ο γραμμικός τελεστής που διέπει την εξέλιξη των διαταραχών, ο τόνος υποδηλώνει την παραγωγή ως προς z και $K = \sqrt{k^2 + l^2}$ είναι ο ολικός κυματάριθμος. Για να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του τελεστή A , διακριτοποιούμε τα πεδία σε ένα πλεκτό (staggered) πλέγμα. Δηλαδή διακριτοποιούμε το στροβιλισμό και την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας στο πλέγμα N σημείων $z_i = -L + idz, i = 1, 2, \dots, N$ και την άνωση στα $N + 1$ ενδιάμεσα σημεία $z_i^s = -L + (i + 1)dz/2, i = 0, 2, \dots, N$, όπου $dz = 2L/N$. Θεωρούμε επίσης ομογενείς συνοριακές συνθήκες για τα πεδία στα όρια του πλέγματος που βρίσκονται στα σημεία $|z| = L$. Το L το διαλέγουμε να βρίσκεται μακριά από τη διατμητική περιοχή ώστε οι συνοριακές συνθήκες να μην επηρεάζουν τα αποτελέσματα. Έτσι τα πεδία γίνονται διανύσματα με στοιχεία τις τιμές τους στα σημεία του πλέγματος και οι παράγωγοι που υπολογίζονται μέσω πεπερασμένων διαφορών γίνονται πίνακες. Τέλος για τον υπολογισμό των πεδίων $\hat{\zeta}$ και \hat{u}_z στα σημεία του z_i^s χρησιμοποιούμε το μέσο όρο τους στα γειτονικά σημεία του z_i^s και ομοίως για τον ορισμό του \hat{b} στα σημεία του πλέγματος z_i . Έτσι ο τελεστής A γίνεται ένας $(3N + 1) \times (3N + 1)$ πίνακας, τις ιδιοτιμές λ και τα ιδιοανύσματα του οποίου υπολογίζουμε αριθμητικά.

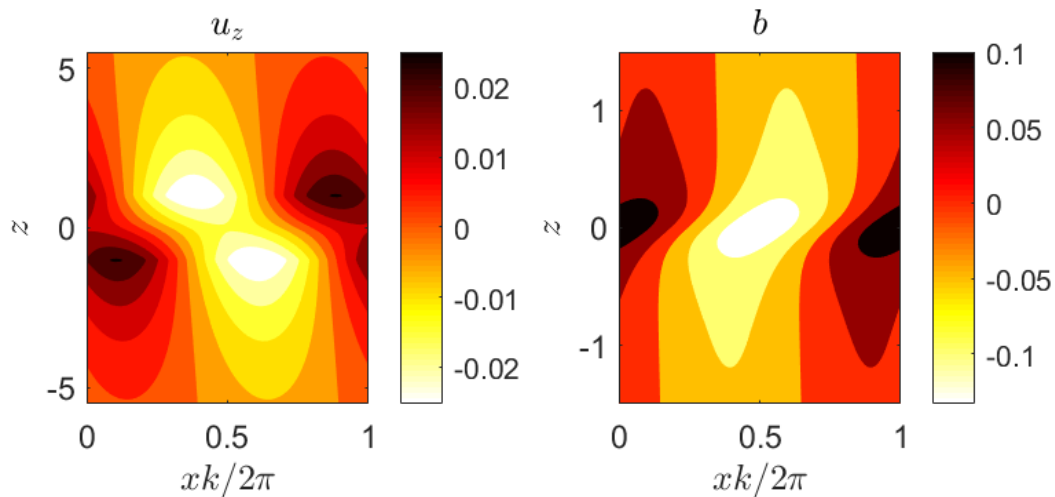
3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΑΣΤΑΘΕΙΑΣ

Η ανάλυση των ιδιοτιμών του A στο όριο της προσέγγισης Boussinesq ($S = 0.01$) δείχνει ότι η ροή είναι ασταθής σε διαταραχές μεγάλης κλίμακας όπως φαίνονται στο Σχήμα 2 όπου σχεδιάζεται ο ρυθμός εκθετικής αύξησης $\sigma = \text{real}(\lambda)$ σα συνάρτηση του ολικού κυματάριθμου K και της γωνίας $\theta = \arctan(l/k)$ που σχηματίζουν οι γραμμές σταθερής φάσης με την y διεύθυνση για δύο αριθμούς Richardson. Παρατηρούμε ότι ο μέγιστος ρυθμός εκθετικής αύξησης επιτυγχάνεται για διδιάστατες διαταραχές στο επίπεδο $x - z$ ($\theta = 0$), εύρημα που είναι συνεπές με το θεώρημα του Squire το οποίο έχει αποδειχθεί για ρευστά χωρίς διαστρωμάτωση (Smolyakov et al. 1933). Για μεγαλύτερους αριθμούς Richardson η περιοχή της αστάθειας μειώνεται όπως και ο ρυθμός εκθετικής αύξησης (Σχήμα 2β) και μηδενίζεται για $Ri > 1/4$ σύμφωνα με το θεώρημα του Miles (1961).



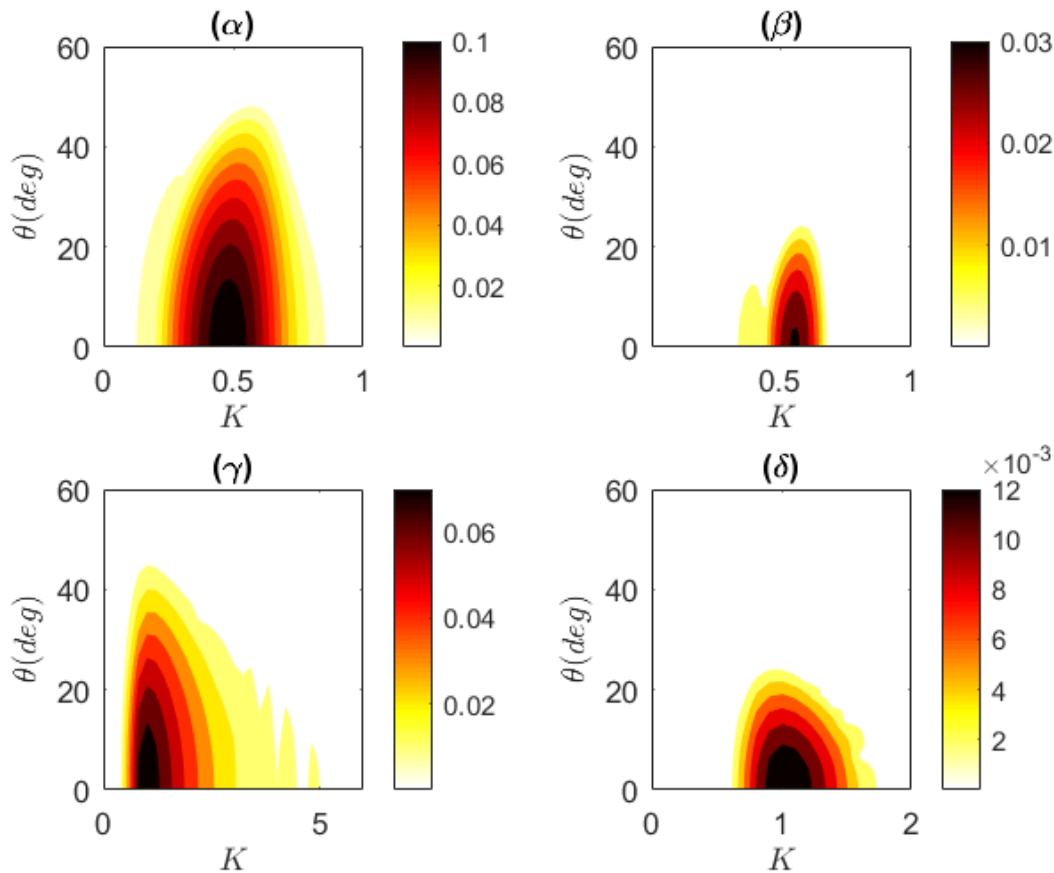
Σχήμα 2. Ρυθμός εκθετικής αύξησης σ σε συνάρτηση του οριζόντιου κυματάριθμου K και της γωνίας θ για (α) $Ri = 0.1$ και (β) $Ri = 0.2$ στο όριο της προσέγγισης Boussinesq ($S = 0.01$).

Στο Σχήμα 3 φαίνεται η δομή της πιο ασταθούς ιδιοκατάστασης για $Ri = 0.1$. Παρατηρούμε ότι οι ισοφασικές επιφάνειες της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας έχουν κλίση αντίθετη της διάτμησης ώστε η διαταραχή να έχει αρνητική τάση Reynolds και να παίρνει κινητική ενέργεια από τη μέση ροή. Παρατηρούμε επίσης ότι η ταχύτητα έχει μέγιστες τιμές στα άκρα της περιοχής διάτμησης, ενώ η άνωση στη μέση της περιοχής. Η δομή αυτή είναι χαρακτηριστική της δυναμικής αστάθειας και μπορεί να περιγραφεί από την αλληλεπίδραση κυμάτων ασυνέχειας (Harnik and Heifetz, 2007). Τα κύματα αυτά υποστηρίζονται στα σημεία ασυνέχειας της βαθμίδας του στροβιλισμού (στις άκρες δηλαδή της περιοχής διάτμησης) και αλληλεπιδρούν επάγοντας ροή το ένα στην περιοχή του άλλου. Έτσι το ένα μπορεί να ενισχύει το πλάτος του άλλου και μπορεί να αλλάζει τη φασική του ταχύτητα. Αν η διαφορά φάσης μεταξύ τους κλειδώσει σε διάταξη που το ένα να ενισχύει το άλλο, τότε προκύπτει αστάθεια (Carpenter et al. 2013).



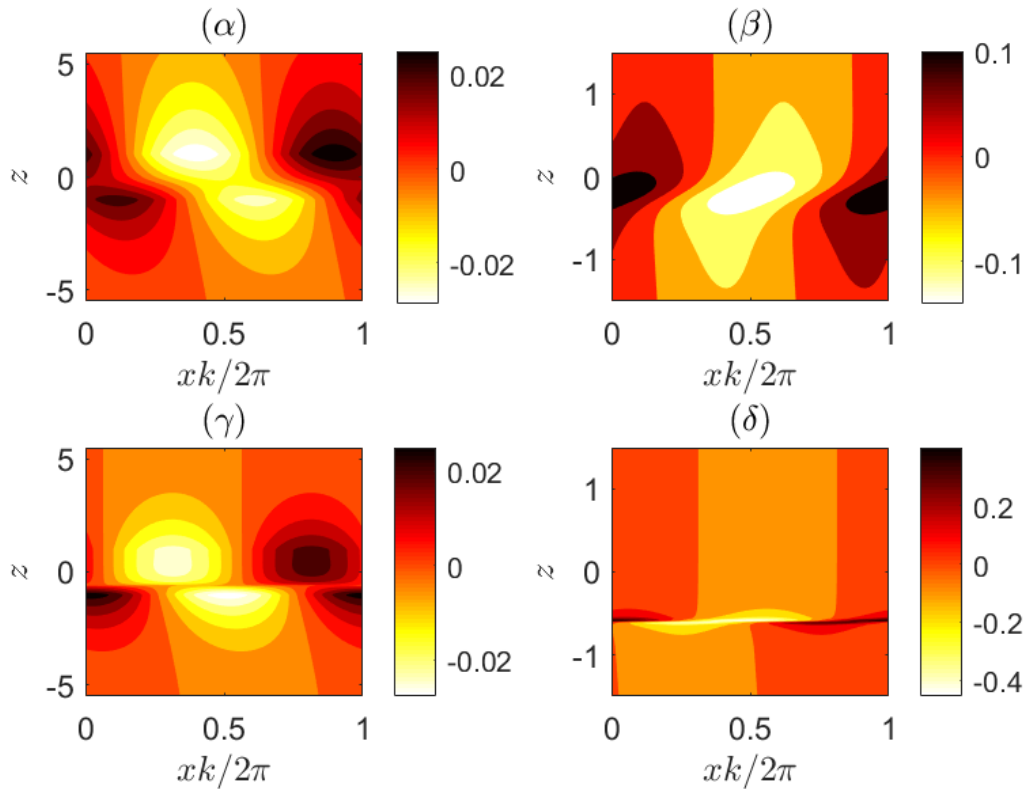
Σχήμα 3. Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας (αριστερά) και η άνωση (δεξιά) για την πιο ασταθή ιδιοκατάσταση με $K = 0.46$, και $\theta = 0$ για $Ri = 0.1$ και $S = 0.01$.

Στο Σχήμα 4 φαίνεται ο μέγιστος ρυθμός εκθετικής αύξησης για δύο τιμές του αριθμού Richardson και για δύο τιμές του λόγου S . Παρατηρούμε ότι καθώς απομακρυνόμαστε από την περιοχή ισχύος της προσέγγισης Boussinesq, ο μέγιστος ρυθμός εκθετικής αύξησης συνεχίζει να εμφανίζεται για διδιάστατες διαταραχές. Όμως η τιμή του μειώνεται μονότονα με την παράμετρο S , ενώ η κλίμακα της διαταραχής, η οποία αυξάνει το πλάτος της με το μέγιστο ρυθμό, μειώνεται. Παράλληλα παρατηρούμε ότι η ροή γίνεται ασταθής και σε διαταραχές με μικρότερες κλίμακες, καθώς η περιοχή της αστάθειας επεκτείνεται και σε διαταραχές με οριζόντια κλίμακα της τάξης του πάχους της διατμητικής ροής ($K \approx 5$) για $S = 1$ (Σχήμα 4γ). Τέλος, είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι το ικανό κριτήριο για αστάθεια ($Ri < 1/4$) παραμένει το ίδιο για όλους του αριθμούς S . Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι μακριά από την περιοχή ισχύος της προσέγγισης Boussinesq, ο ρυθμός εκθετικής αύξησης των διαταραχών είναι μικρότερος, ενώ οι πιο ασταθείς διαταραχές που είναι διδιάστατες, έχουν μικρότερη οριζόντια κλίμακα σε σχέση με τις αντίστοιχες διαταραχές στην περιοχή ισχύος της προσέγγισης.



Σχήμα 4. Ρυθμός εκθετικής αύξησης σ σε συνάρτηση του οριζόντιου κυματάριθμου K και της γωνίας θ για (α) $S = 0.2$ και $Ri = 0.1$, (β) $S = 0.2$ και $Ri = 0.2$, (γ) $S = 1$ και $Ri = 0.1$ και (δ) $S = 1$ και $Ri = 0.2$.

Στο Σχήμα 5 φαίνεται η δομή της πιο ασταθούς ιδιοκατάστασης για δύο τιμές του S . Βλέπουμε δύο κύριες διαφορές σε σχέση με τις αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις στο όριο ισχύος της προσέγγισης Boussinesq. Η πρώτη είναι ότι η δομή της πιο ασταθούς ιδιοκατάστασης εμφανίζει ασυμμετρία με την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας να έχει μεγαλύτερες τιμές κοντά στο ένα άκρο της περιοχής διάτμησης και την άνωση να έχει μέγιστο προς το κάτω όριο της περιοχής αντί για το κέντρο της. Η δεύτερη είναι ότι για μεγάλες τιμές του λόγου, παρατηρούμε μια ασυνέχεια κοντά στο κάτω όριο της περιοχής διάτμησης που υποδηλώνει την ύπαρξη εκεί ενός κρίσιμου επιπέδου (critical layer) όπου είναι και το σημείο αλληλεπίδρασης της διαταραχής με τη μέση ροή. Με βάση αυτές τις διαφορές μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η βαθμίδα της μέσης πυκνότητας επάγει μια ασυμμετρία η οποία αλλάζει τη θέση του κρίσιμου επιπέδου στη ροή και κατά πάσα πιθανότητα αλλάζει και τα χαρακτηριστικά της αλληλεπίδρασης των κυμάτων ασυνέχειας. Η παρατήρηση αυτή αξίζει να ερευνηθεί περαιτέρω, αλλά είναι εκτός του σκοπού της εργασίας αυτής.



Σχήμα 5. Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας (α) και η άνωση (β) για την πιο ασταθή ιδιοκατάσταση με $K = 0.48$, και $\theta = 0$ για $Ri = 0.1$ και $S = 0.2$. Ομοίως στο (γ) και (δ) φαίνεται η δομή της πιο ασταθούς ιδιοκατάστασης με $K = 1$, και $\theta = 0$ για $Ri = 0.1$ και $S = 1$.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία μελετήθηκε η δυναμική αστάθεια μιας διατμητικής ροής σε ένα ευσταθώς διαστρωματωμένο ρευστό λαμβάνοντας υπόψη πλήρως τη βαθμίδα της μέσης πυκνότητας, χωρίς δηλαδή να γίνει η προσέγγιση Boussinesq. Μέσω διαστατικής ανάλυσης βρέθηκε ότι η δυναμική εξαρτάται από δύο αδιάστατες παραμέτρους, τον αριθμό Richardson Ri και τον λόγο S του ρυθμού εκθετικής μείωσης της μέση πυκνότητας προς το πάχος της περιοχής διάτμησης. Η δομή των τρισδιάστατων διαταραχών που αυξάνουν εκθετικά το πλάτος τους υπολογίστηκε αριθμητικά, καθώς και ο αντίστοιχος ρυθμός εκθετικής αύξησης. Βρέθηκε ότι οι πιο ασταθείς δομές είναι διδιάστατες για όλες τις τιμές των αριθμών Ri και S και σε όλο το εύρος των οριζόντιων κυματάριμων για τους οποίους έχουμε αστάθεια, αποτέλεσμα που έρχεται σε συμφωνία με το θεώρημα του Squire, το οποίο έχει αποδειχθεί για μη διαστρωματωμένες ροές. Ο ρυθμός εκθετικής αύξησης για τις πιο ασταθείς διαταραχές βρέθηκε ότι μειώνεται μονότονα με το S για όλους τους αριθμούς Richardson, ενώ οι πιο ασταθείς δομές έχουν μικρότερη οριζόντια κλίμακα για μεγαλύτερο S . Επίσης βρέθηκε ότι για τιμές του $S \sim O(1)$ η ροή είναι ασταθής και σε διαταραχές με μικρή οριζόντια κλίμακα της τάξης του πάχους της περιοχής διάτμησης. Εξετάστηκε η ικανή συνθήκη του Miles για αστάθεια, ότι δηλαδή ο αριθμός Richardson $Ri < 1/4$ για την ύπαρξη αστάθειας και βρέθηκε αριθμητικά ότι ισχύει και στην περίπτωση που η βαθμίδα της μέσης πυκνότητας λαμβάνεται πλήρως υπόψη. Τέλος εξετάστηκε η δομή των πιο ασταθών διαταραχών και συγκρίθηκε με τη δομή των πιο ασταθών διαταραχών στο όριο της ισχύος της προσέγγισης Boussinesq. Ενώ στο όριο ισχύος της προσέγγισης Boussinesq ($S \ll 1$) η δομή των πιο ασταθών διαταραχών είναι συμμετρική και αντιπροσωπευτική της αλληλεπίδρασης κυμάτων ασυνέχειας που εδράζονται στα όρια της περιοχής της διάτμησης, για μεγαλύτερες τιμές του S η δομή είναι ασύμμετρη με τις διαταραχές να εμφανίζουν μεγαλύτερο πλάτος κοντά στο κάτω όριο

της διατμητικής περιοχής και κρίσιμο επίπεδο κοντά σε αυτό. Το χαρακτηριστικό αυτό δείχνει ότι η αλληλεπίδραση των κυμάτων ασυνέχειας που μπορεί να εξηγήσει το μηχανισμό της αστάθειας, αλλάζει και χρήζει περαιτέρω μελέτης.

Αναφορές

- Carpenter JR, Tedford EW, Heifetz E, and Lawrence GA (2013) Instability in stratified shear flow: Review of a physical interpretation based on interacting waves. *Applied Mech. Rev.* 64: 060801-17.
- Drazin P. G. and Reid, W. H. (1981), "Hydrodynamic Instability", Cambridge Univ. Press. 527 pp.
- Harnik N. and Heifetz E. (2007), "Relating overreflection and wave geometry to the counterpropagating Rossby wave perspective: Toward a deeper understanding of shear instability. *J. Atmos. Sci.*, 64, 2238-2261
- Lin, C. C. (1955), "The Theory of Hydrodynamics Instability", Cambridge Univ. Press. 155 pp.
- Lindzen R S (1974) Stability of a Helmholtz Velocity Profile in a Continuously Stratified, Infinite Boussinesq Fluid - Applications to Clear Air Turbulence. *J. Atmos. Sci.*, 31, p. 1507
- Smolyakov, A. I, Diamond, P. H. and Shevchenko, V. I. (1933), "On the stability of three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls", *Proc. R. Soc. London Ser. A* 142, p. 621
- Wunsch C. and Ferrari R (2004)., "Vertical mixing, energy and the general circulation of the oceans ", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 36, p. 281.

Modal stability analysis of a stably stratified shear flow with respect to three dimensional perturbations in the non-Boussinesq limit

Evangelos Stasinou and Nikolaos A. Bakas

**Laboratory of Meteorology and Climatology, Department of Physics, University of Ioannina
e-mail: nbakas@uoi.gr**

SUMMARY

Stratified shear instability is a ubiquitous process in the atmosphere and the ocean producing turbulence and mixing. Even though the necessary conditions for its emergence, its characteristics and its evolution have been thoroughly investigated, most theoretical work is based on the Boussinesq approximation according to which the mean density gradient is taken into account only in the buoyancy force when density varies slowly with height. However, the conditions for the validity of this approximation are not always met. In this work, we investigate modal stratified shear instability without invoking the Boussinesq approximation. We numerically calculate the growth rate of three dimensional perturbations as well as the structure of the unstable modes and compare them to the corresponding growth and structure of unstable modes in the Boussinesq limit. We find that the most unstable structures are two dimensional and reside in the plane of the flow for all wavenumbers for which we have instability, in accordance to Squire's theorem that is proven for unstratified flows. The growth rate was found to be reduced compared to the corresponding rate in the Boussinesq limit, and the most unstable structures have smaller horizontal scales. Miles necessary condition for instability (that the Richardson number has to be smaller than $\frac{1}{4}$ in the bulk of the flow) was shown to hold in the non-Boussinesq limit as well. Finally, the structure of the most unstable structures was found to be asymmetric with the critical layer of the unstable perturbation moving towards the lower boundary as the density gradient becomes larger.

Key words: stratified shear instability, non-Boussinesq limit