

## Μελέτη ακρίβειας υπολογιστικών στοιχείων δευτέρας τάξης σε πλέγματα διακριτοποίησης περιοχών οριακού στρώματος

Ιωάννης Καλλιντέρης, Ελένη Μ. Λυμπεροπούλου, Γεώργιος Σπυρίδωνος,  
Παναγιώτης Αντωνέλλης

Εργαστήριο Αεροδυναμικού Σχεδιασμού Αεροχημάτων,  
Τμήμα Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Πατρών, 26504 Ρίο.

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα υπολογιστικά πλέγματα ανωτέρας τάξης τυπικά χρησιμοποιούνται όταν οι γεωμετρίες και τα πεδία ροής που μελετώνται παρουσιάζουν μεγάλη καμπυλότητα. Με τη χρήση καμπύλων υπολογιστικών στοιχείων η ακρίβεια των υπολογισμών μπορεί να αυξηθεί σημαντικά. Στην παρούσα εργασία, υπολογιστικά πλέγματα δευτέρας τάξης συγκρίνονται με τα αντίστοιχα πλέγματα πρώτης τάξης ως προς την ακρίβεια. Ο υπολογισμός των χωρικών παραγώγων σε αναλυτικά πεδία ροής καθώς και του όγκου κλειστών επιφανειών χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση του υπολογιστικού σφάλματος. Επίσης, παρουσιάζεται μια μέθοδος αξιολόγησης της ακρίβειας που βασίζεται στην εύρεση αναλυτικών εκφράσεων του σφάλματος αποκοπής. Εξετάζεται η ευαισθησία των στοιχείων αυτών σε τυπικές παραμορφώσεις του υπολογιστικού πλέγματος, όπως είναι η επιμήκυνση ("stretching"), η λοξότητα ("skewness"), και η στρέψη ("torsion"). Η μελέτη αφορά σε εξαεδρικά και πρισματικά υπολογιστικά στοιχεία που χρησιμοποιούνται τυπικά σε πλέγματα διακριτοποίησης περιοχών οριακού στρώματος.

**Λέξεις Κλειδιά:** Πλέγματα δευτέρας τάξης, καμπύλα στοιχεία, σφάλμα αποκοπής.

### 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια η έρευνα έχει στραφεί στην ανάπτυξη υπολογιστικών μεθόδων ανωτέρας τάξης για την επίλυση προβλημάτων ρευστομηχανικής. Σημαντικό πλεονέκτημα των μεθόδων αυτών είναι η αυξημένη ακρίβεια που μπορεί να επιτευχθεί με σχετικά μικρό υπολογιστικό κόστος σε σχέση με τις μεθόδους πρώτης τάξης (βλ. Leicht et al., 2014 και Wang et al., 2013). Στις μεθόδους ανωτέρας τάξης περιλαμβάνονται οι μέθοδοι «spectral» (πχ. Korczak et al., 1986, Karniadakis et al., 1999 και Liu et al., 2006), οι υψηλής ακρίβειας εκδοχές των μεθόδων πεπερασμένων όγκων (πχ. Barth, 1994 και Olivier-Gooch et al., 2002), καθώς επίσης και ο συνδυασμός αυτών των μεθόδων (βλ. Minyard et al., 1995). Επιπλέον, πολλές εκδοχές της μεθόδου «Discontinuous Galerkin» είναι ανώτερης τάξης (πχ. Cockburn et al., 2000, Nguyen et al., 2007, Bassi et al., 1997 και Natase et al., 2006). Συγκεντρωτικά οι μέθοδοι ανωτέρας τάξης που χρησιμοποιούνται έχουν παρουσιαστεί και αξιολογηθεί σε σχετικά πρόσφατες δημοσιεύσεις από τους Ekaterinaris (2005) και Shu et al. (2003) για δομημένα πλέγματα, και από τον Wang (2007) για μη δομημένα πλέγματα.

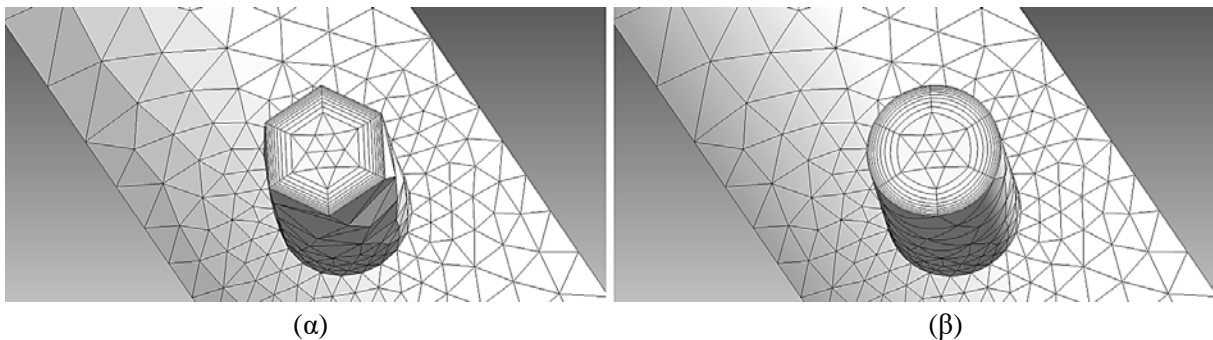
Έχει καθιερωθεί πλέον ότι οι λύτες ανωτέρας τάξης απαιτούν σχετικά αραιά πλέγματα για να μειώσουν το υπολογιστικό κόστος και να διατηρήσουν ταυτόχρονα υψηλή ακρίβεια υπολογισμών. Τα υπολογιστικά πλέγματα που χρησιμοποιούνται πρέπει να μπορούν να προσεγγίζουν την εξεταζόμενη γεωμετρία ικανοποιητικά και ιδιαίτερα τις περιοχές της γεωμετρίας που έχουν υψηλή καμπυλότητα. Ωστόσο, τα πλέγματα πρώτης τάξης που χρησιμοποιούνται τυπικά απαιτούν μεγάλο αριθμό υπολογιστικών στοιχείων για την διακριτοποίηση πολύπλοκων γεωμετριών στις τρεις διαστάσεις. Επιπλέον, έχει παρατηρηθεί ότι είναι πολλές φορές ακατάλληλα για υπολογιστικές μεθόδους

ανωτέρας τάξης καθώς το υπολογιστικό σφάλμα μπορεί να αυξηθεί σημαντικά μειώνοντας μέχρι και την ολική τάξη της μεθόδου (βλ. Leicht et al., 2013, Dey et al., 1997 και Luo et al., 2002) ή σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να εμφανιστούν ταλαντώσεις στη λύση (βλ. Bassi et al., 1997). Τα παραπάνω προβλήματα υποδεικνύουν τη σημασία της χρήσης καμπύλων υπολογιστικών στοιχείων δευτέρας τάξης.

Παρότι έχει γίνει αρκετή έρευνα πάνω στη δημιουργία καμπύλων πλεγμάτων, η αξιολόγηση της αποδοτικότητάς τους (πχ. Kallinderis et al., 2015) δεν έχει μελετηθεί επαρκώς. Στην παρούσα εργασία μελετάται η ακρίβεια των υπολογιστικών στοιχείων δευτέρας τάξης σε πλέγματα διακριτοποίησης οριακού στρώματος. Το σφάλμα προσδιορίζεται με τον υπολογισμό των παραγώγων της ταχύτητας σε αναλυτικά πεδία ροής καθώς και του όγκου κλειστών επιφανειών. Εξετάζεται επίσης η ευαισθησία των καμπύλων στοιχείων στις τυπικές παραμορφώσεις των πραγματικών υπολογιστικών πλεγμάτων, όπως είναι η επιμήκυνση («stretching»), η λοξότητα («skewness») και η στρέψη («torsion»).

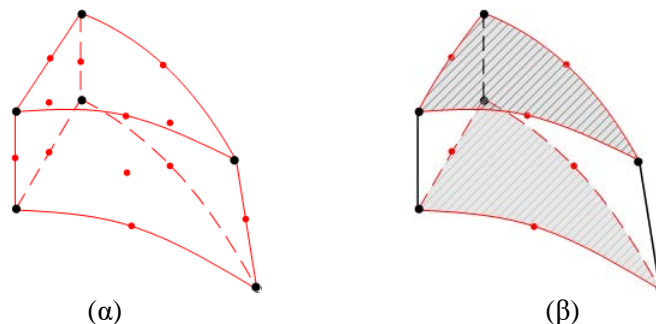
## 2. ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΗΣ

Ένα από τα βασικότερα χαρακτηριστικά των πλεγμάτων δευτέρας τάξης είναι η ικανότητά τους να «ακολουθούν» την καμπυλότητα της γεωμετρίας και του πεδίου που την περιβάλλει. Στο Σχήμα 1 φαίνεται το πλέγμα πρώτης και δευτέρας τάξης για την γεωμετρία σωλήνα πάνω σε ένα δακτυλιοειδή τομέα. Παρατηρείται ότι η καμπυλότητα της γεωμετρίας προσεγγίζεται καλύτερα από το πλέγμα δευτέρας τάξης.



Σχήμα 1. Τοπική γεωμετρία σωλήνα πάνω σε δακτυλιοειδή τομέα διακριτοποιημένη με: (α) πλέγμα πρώτης τάξης και (β) πλέγμα δευτέρας τάξης.

Στα τυπικά πεδία ροής του οριακού στρώματος δεν υπάρχει αρκετή καμπύλωση της ροής στη διεύθυνση κάθετα στην γεωμετρία. Συνεπώς, τα πλέγματα δευτέρας τάξης που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία είναι «κατευθυντικά». Συγκεκριμένα, τα κατευθυντικά πλέγματα δευτέρας τάξης θεωρούν ως δευτέρας τάξης τις ακμές που είναι παράλληλες στο τοίχωμα («lateral edges») και ως πρώτης τάξης τις κάθετες ακμές («normal edges») των εξαεδρικών και των πρισματικών υπολογιστικών στοιχείων. Για παράδειγμα, στην περίπτωση των πρισμάτων, μόνο οι ακμές των τριγωνικών επιφανειών είναι δευτέρας τάξης ενώ οι κάθετες ακμές των τετραπλευρικών επιφανειών είναι πρώτης τάξης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2. Τοπολογία πρίσματος: (α) δευτέρας τάξης, και (β) «κατευθυντικό» δευτέρας τάξης. Οι ευθύγραμμες ακμές πρώτης τάξης απεικονίζονται με έντονο μαύρο χρώμα.

### 3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Για την αξιολόγηση της ακρίβειας των πλεγμάτων δευτέρας τάξης χρησιμοποιούνται τυπικοί υπολογισμοί όγκου κλειστών επιφανειών και παραγώγων της ταχύτητας του πεδίου. Οι δείκτες σφάλματος υπολογίζονται τόσο για πλέγματα δευτέρας όσο και πρώτης τάξης και εξετάζεται ο αριθμός των υπολογιστικών στοιχείων που απαιτούνται από τον κάθε τύπο πλέγματος ώστε να επιτευχθεί μια επιθυμητή ακρίβεια.

Ως δείκτης σφάλματος για τους υπολογισμούς των παραγώγων ταχύτητας χρησιμοποιείται το μέσο σφάλμα που ορίζεται ως εξής:

$$E_F \equiv \frac{1}{N} \sum |\nabla \mathbf{u} - \nabla^h \mathbf{u}|, \quad (1)$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλους τους κόμβους του πλέγματος ( $N$ ) και  $\nabla^h \mathbf{u}$ ,  $\nabla \mathbf{u}$  είναι ο αναλυτικός και το υπολογισμένος τελεστής, αντίστοιχα.

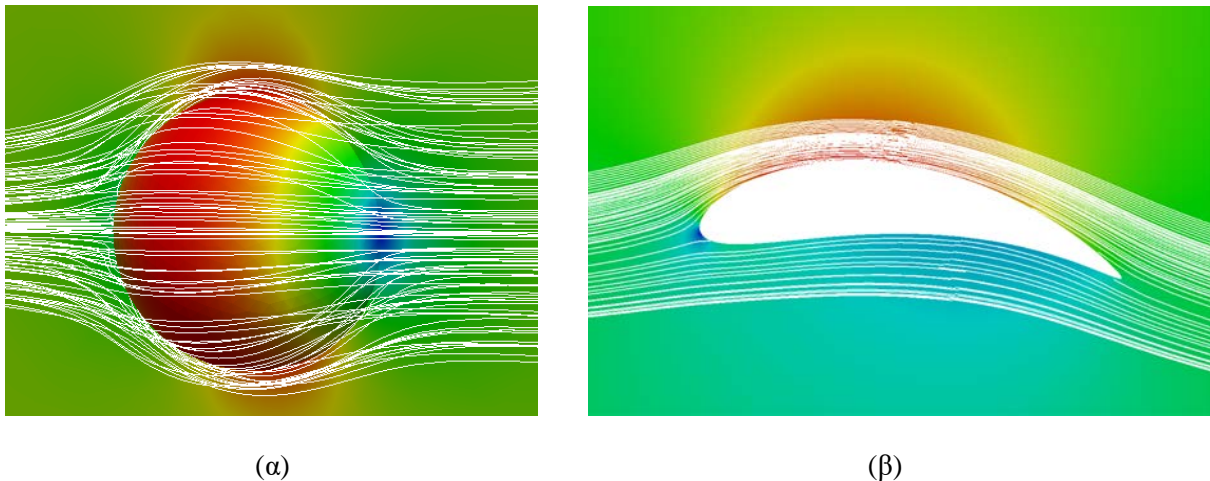
Ο αντίστοιχος δείκτης σφάλματος για τον υπολογισμό του όγκου κλειστών γεωμετριών είναι:

$$E_V \equiv |V - V^h|, \quad (2)$$

όπου  $V^h$  είναι ο υπολογισμένος όγκος και  $V$  είναι είτε ο αναλυτικός όγκος, είτε η τιμή του όγκου που προκύπτει με ένα πολύ πυκνό πλέγμα μετά από μελέτη σύγκλισης του αποτελέσματος.

#### 3.1 Υπολογισμός Χωρικών Παραγώγων

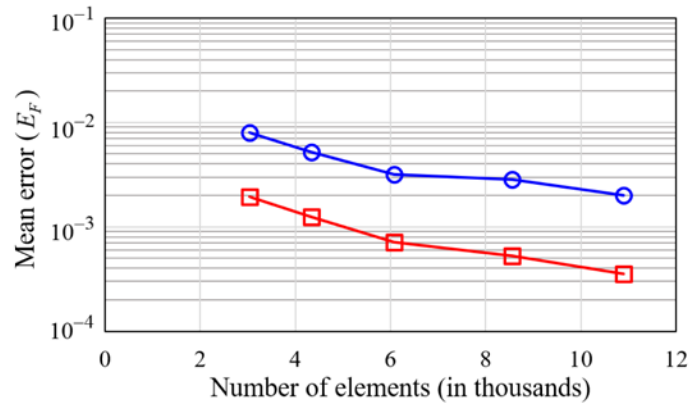
Για την αξιολόγηση των υπολογιστικών πλεγμάτων ως προς την ακρίβεια με χρήση του δείκτη σφάλματος  $E_F$  χρησιμοποιούνται αναλυτικά πεδία ροής. Συγκεκριμένα, εξετάζονται δυναμικές ροές γύρω από σφαίρα, περιστρεφόμενο κύλινδρο, πτέρυγα Joukowski, καθώς επίσης και στρόβιλος Lamb-Oseen σε ελεύθερη ροή. Για τις περιπτώσεις αυτές το αναλυτικό αποτέλεσμα είναι  $\nabla \mathbf{u} = 0$ . Ενδεικτικά, το πεδίο ταχύτητας για την περίπτωση ροής γύρω από σφαίρα και την πτέρυγα Joukowski φαίνονται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3. Αναλυτικά πεδία ταχύτητας και βασικές ροϊκές γραμμές. Δυναμική ροή γύρω από (α) σφαίρα και (β) πτέρυγα Joukowski.

Η εξάρτηση του υπολογιστικού σφάλματος από την πυκνότητα των πλεγμάτων εξετάζεται με σκοπό να βρεθούν αραιά πλέγματα δευτέρας τάξης (“High Order Coarse - HOC”) και πυκνά πλέγματα πρώτης τάξης (“Low Order Fine - LOF”) στα οποία υπεισέρχεται περίπου το ίδιο σφάλμα. Ενδεικτικά, για την περίπτωση της ροής γύρω από περιστρεφόμενο κύλινδρο το μέσο σφάλμα συναρτήσκει του

αριθμού των υπολογιστικών στοιχείων φαίνεται στο Σχήμα 4. Παρατηρείται ότι για να προκύψει παρόμοιο σφάλμα το πλέγμα δευτέρας τάξης χρησιμοποιεί περίπου 3000 υπολογιστικά στοιχεία ενώ το πλέγμα πρώτης τάξης 3.6 φορές περισσότερα (“LOF to HOC mesh elements ratio”). Δηλαδή, το πλέγμα δευτέρας τάξης απαιτεί πολύ μικρότερο αριθμό στοιχείων για να φτάσει την επιθυμητή ακρίβεια. Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον Πίνακα 1. Στη δεύτερη στήλη φαίνεται ο αριθμός των στοιχείων των αραιών πλεγμάτων δευτέρας τάξης (“HOC mesh elements”) ενώ στην τρίτη στήλη ο αριθμός που αναγράφεται εκφράζει πόσες φορές πυκνότερο πρέπει να είναι ένα πλέγμα πρώτης τάξης για να επιτευχθεί περίπου η ίδια ακρίβεια με αυτή του πλέγματος δευτέρας τάξης.



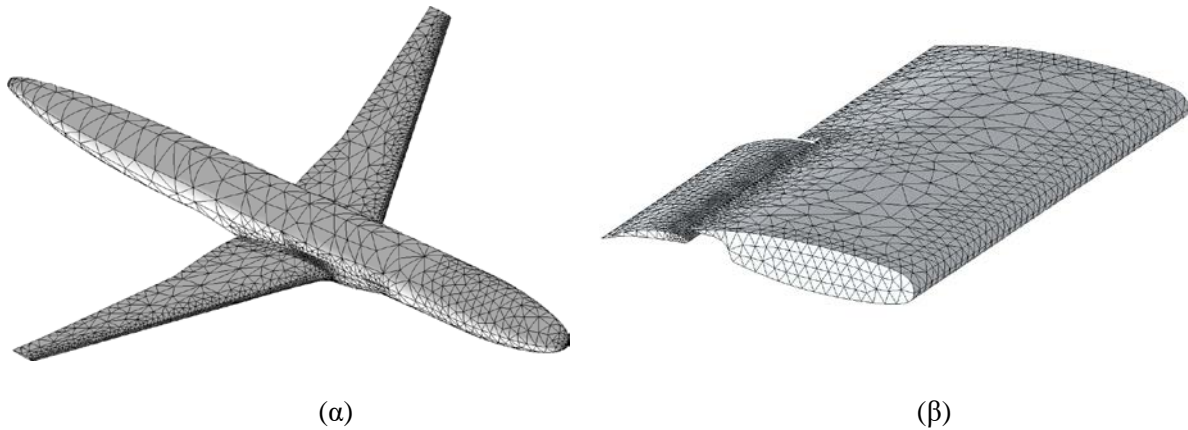
Σχήμα 4. Εξάρτηση του υπολογιστικού σφάλματος από την πυκνότητα του πλέγματος. Σύγκριση μεταξύ πλεγμάτων δευτέρας (□) και πρώτης τάξης (○). Υπολογισμός του σφάλματος για τη ροή γύρω από περιστρεφόμενο κύλινδρο.

Πίνακας 1: Αποτελέσματα υπολογισμού του τελεστή  $\nabla^h \mathbf{u}$  με πυκνά πλέγματα πρώτης τάξης (LOF) και αραιά πλέγματα δευτέρας τάξης (HOC) στα οποία υπεισέρχεται περίπου το ίδιο σφάλμα ( $E_F$ ).

	HOC mesh elements	LOF to HOC mesh elements ratio
Σφαίρα	1520	9.76
Περιστρεφόμενος Κύλινδρος	3040	3.58
Στρόβιλος Lamb-Oseen	3741	6.21
Πτέρυγα Joukowski Wing	32813	4.74

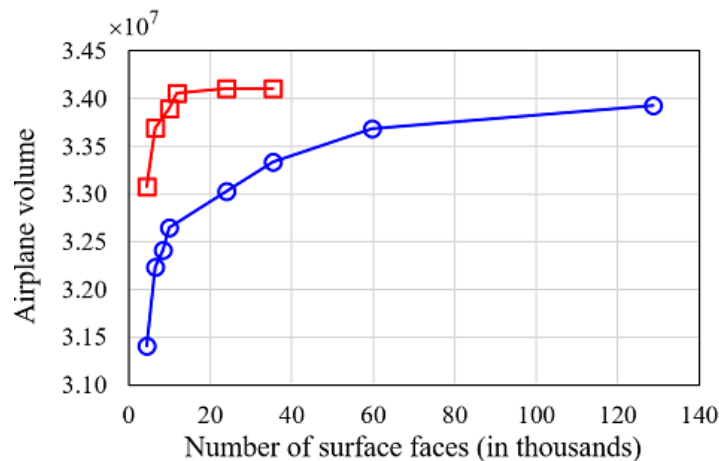
### 3.2 Υπολογισμός Όγκου Κλειστών Επιφανειών

Για τους υπολογισμούς του όγκου εξετάζονται οι γεωμετρίες σφαίρας, υπεραντωτικής πτέρυγας, διάταξης ατράκτου-πτέρυγας, και ελικοειδούς πτερυγίου. Στην περίπτωση της σφαίρας, ο αναλυτικός όγκος είναι γνωστός και άρα το σφάλμα του υπολογισμού του όγκου βρίσκεται απευθείας. Ωστόσο, στις υπόλοιπες περιπτώσεις πραγματοποιείται μελέτη σύγκλισης για κάθε ένα από τα πλέγματα και η συγκλίνουσα τιμή χρησιμοποιείται ως «αναλυτική» για τον υπολογισμό του σφάλματος. Ενδεικτικά, τα επιφανειακά πλέγματα δευτέρας τάξης για την περίπτωση της διάταξης ατράκτου-πτέρυγας και της υπεραντωτικής πτέρυγας φαίνονται στο Σχήμα 5.



Σχήμα 5. Επιφανειακά πλέγματα δευτέρας τάξης για τον υπολογισμό του όγκου κλειστών γεωμετριών: (α) διάταξη πτέρυγας-ατράκτου, και (β) υπεραντωτική πτέρυγα.

Στο Σχήμα 6 παρουσιάζεται η μελέτη σύγκλισης για την περίπτωση του υπολογισμού του όγκου της διάταξης ατράκτου-πτέρυγας. Παρατηρείται ότι τα πλέγματα δευτέρας τάξης συγκλίνουν πολύ πιο γρήγορα στην τελική τιμή του όγκου σε σύγκριση με τα πλέγματα πρώτης τάξης. Συνεπώς, για την επίτευξη του ίδιου σφάλματος ( $E_V$ ) τα πλέγματα δευτέρας τάξης απαιτούν πολύ μικρότερο αριθμό επιφανειακών στοιχείων. Αναλυτικά για την κάθε περίπτωση τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον Πίνακα 2, όπου φαίνεται ο αριθμός των επιφανειακών στοιχείων των αραιών πλεγμάτων δευτέρας τάξης (“HOC mesh surface faces”) και ο λόγος των στοιχείων του πυκνού πλέγματος πρώτης τάξης προς του αραιού πλέγματος δευτέρας τάξης (“LOF to HOC mesh surface faces ratio”) που εκφράζει πόσα περισσότερα επιφανειακά στοιχεία απαιτούνται από το πλέγμα πρώτης τάξης ώστε να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια.



Σχήμα 6. Μελέτη σύγκλισης επιφανειακών πλεγμάτων για τον υπολογισμό του όγκου του πτερυγίου. Τα πλέγματα που μελετώνται είναι: δευτέρας (□) και πρώτης (○) τάξης.

Πίνακας 2: Αποτελέσματα υπολογισμού του όγκου με πυκνά πλέγματα πρώτης (LOF) και αραιά πλέγματα δευτέρας τάξης (HOC) στα οποία υπεισέρχεται περίπου το ίδιο σφάλμα ( $E_V$ ).

	HOC mesh surface faces	LOF to HOC mesh surface faces ratio
Σφαίρα	124	27.16
Υπεραντωτική Πτέρυγα	1326	8.21
Ελικοειδές Πτερόγιο	1974	4.45
Διάταξη Ατράκτου-Πτέρυγας	6466	9.23

#### 4. ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΑΠΟΚΟΠΗΣ

Η εύρεση κατάλληλων δεικτών σφάλματος για την αξιολόγηση των πλεγμάτων δευτέρας τάξης βασίζεται σε μια κοινού τύπου διακριτοποίηση Πεπερασμένων Όγκων των χωρικών παραγώγων στις τρεις διαστάσεις. Συγκεκριμένα, εφαρμόζεται το θεώρημα απόκλισης του Gauss για τον αριθμητικό υπολογισμό της παραγώγου της ταχύτητας. Το σφάλμα αποκοπής (TE) ορίζεται ως εξής:

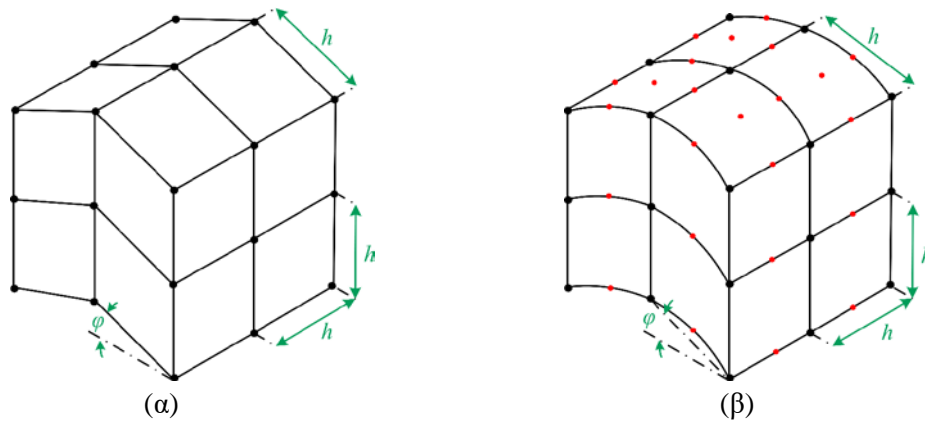
$$TE \equiv \nabla^h \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}, \quad (3)$$

όπου  $\nabla^h \mathbf{u}$  και  $\nabla \mathbf{u}$  είναι οι αριθμητικές και οι αναλυτικές τιμές της απόκλισης της ταχύτητας, αντίστοιχα. Με χρήση του αναπτύγματος της σειράς Taylor της μεταβλητής  $u$  για κάθε σημείο του πλέγματος το TE παίρνει την παρακάτω γενικευμένη μορφή:

$$\begin{aligned} TE_i = & \left( e_x^i u_x + e_y^i u_y + e_z^i u_z \right) + \\ & \left( e_{xx}^i u_{xx} + e_{yy}^i u_{yy} + e_{zz}^i u_{zz} + e_{xy}^i u_{xy} + e_{zx}^i u_{zx} + e_{zy}^i u_{zy} \right) + \quad , \quad (4) \\ & \left( e_{xxx}^i u_{xxx} + e_{yyy}^i u_{yyy} + e_{zzz}^i u_{zzz} + e_{xxy}^i u_{xxy} + e_{xyx}^i u_{xyx} + \right. \\ & \left. e_{zzx}^i u_{zzx} + e_{zxx}^i u_{zxx} + e_{zzy}^i u_{zzy} + e_{zyz}^i u_{zyz} + e_{xyz}^i u_{xyz} \right) + \dots \end{aligned}$$

όπου  $i$  μπορεί να είναι μία εκ των διευθύνσεων  $x$ ,  $y$ , ή  $z$ . Οι όροι ( $e$ ) περιλαμβάνουν μόνο παραμέτρους του πλέγματος και ομαδοποιούνται σύμφωνα με την τάξη τους. Χρησιμοποιούνται ως δείκτες σφάλματος για τη σύγκριση των πλεγμάτων δευτέρας τάξης με τα αντίστοιχα πρώτης τάξης με σκοπό να μελετηθεί αν παρουσιάζουν μεγαλύτερη ευαισθησία σε παραμορφώσεις τύπου “stretching”, “skewness” και “torsion” .

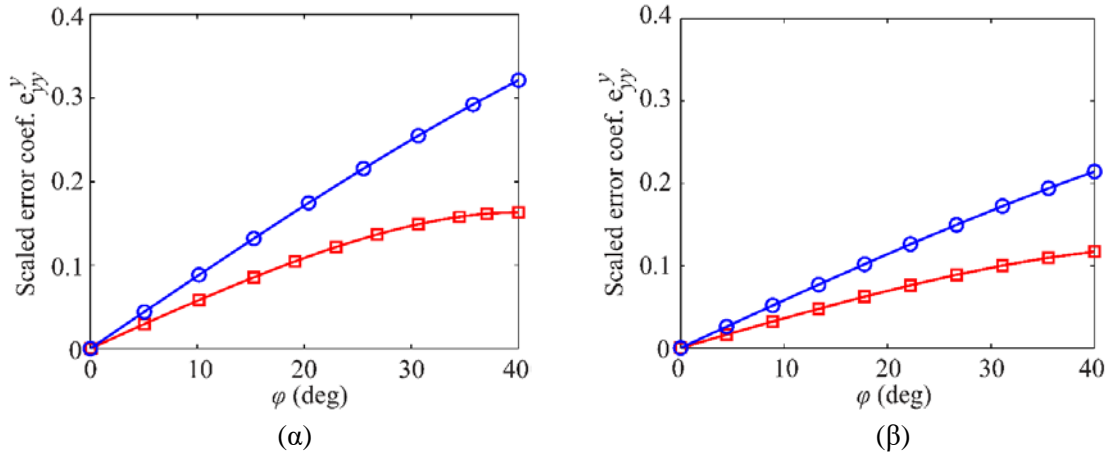
Αρχικά μελετάται η επίδραση της καμπυλότητας της γεωμετρίας στους δείκτες σφάλματος. Στο Σχήμα 7 απεικονίζεται ένα τοπικό εξαεδρικό πλέγμα πρώτης τάξης και το αντίστοιχο πλέγμα δευτέρας τάξης με καμπύλες επιφάνειες. Η γωνία  $\varphi$  που φαίνεται στην εικόνα εκφράζει την απόκλιση από επίπεδη επιφάνεια και χρησιμοποιείται ως μέτρο της καμπύλωσης του πλέγματος.



Σχήμα 7. Εξαεδρικά τοπικά πλέγματα (α) πρώτης και (β) δευτέρας τάξης που χρησιμοποιούνται για την διακριτοποίηση της περιοχής πάνω από μία καμπύλη επιφάνεια.

Τόσο για τα εξαεδρικά τοπικά πλέγματα που απεικονίζονται στο Σχήμα 7 όσο και για αντίστοιχα πρισματικά πλέγματα, ο συντελεστής σφάλματος  $e_{yy}$  στην  $y$ -διεύθυνση είναι ο μόνος που παίρνει μη μηδενικές τιμές. Στο Σχήμα 8 φαίνεται πώς μεταβάλλεται ο συντελεστής με την αύξηση της γωνίας καμπύλωσης  $\varphi$  για κάθε τύπο πλέγματος.

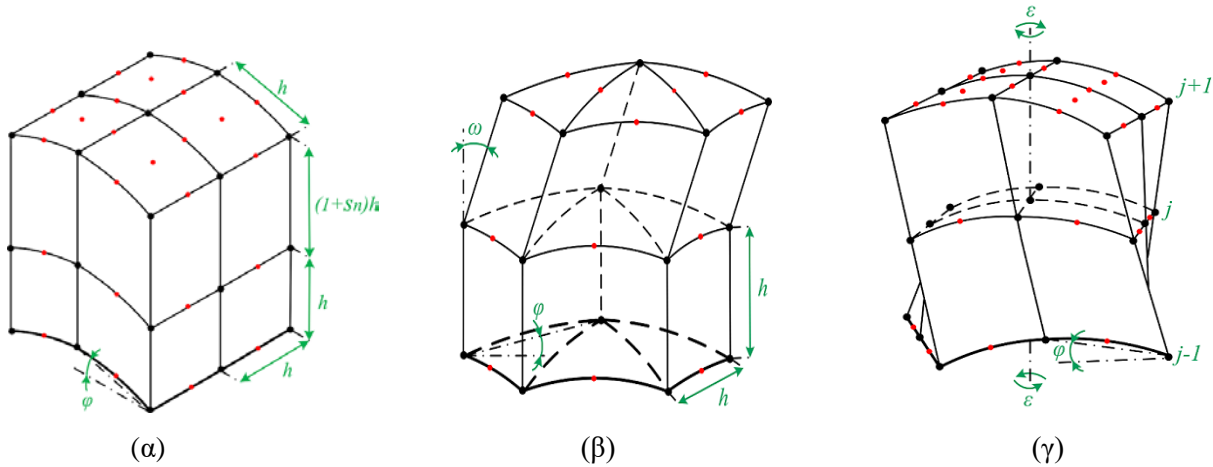




Σχήμα 8. Ευαισθησία των πλεγμάτων πρώτης (○) και δεύτερας (□) τάξης στη γωνία καμπυλότητας  $\varphi$ . Ο συντελεστής σφάλματος ( $e_{yy}^y$ ) υπολογίζεται για (α) εξαέδρα και (β) πρίσματα.

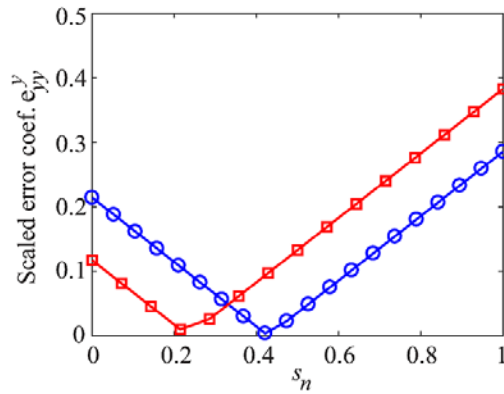
Είναι εμφανές ότι ο δείκτης σφάλματος μειώνεται με τη χρήση πλέγματος δεύτερας τάξης καθώς και ότι όσο μεγαλύτερη είναι η καμπυλότητα της γεωμετρίας τόσο μεγαλύτερη είναι και η μείωση του σφάλματος που μπορεί να επιτευχθεί.

Σε συνδυασμό με τη γωνία καμπύλωσης  $\varphi$  εφαρμόζονται επιπλέον παραμορφώσεις (“stretching”, “skewness” και “torsion”). Στο Σχήμα 9 απεικονίζονται παραμορφωμένα τοπικά πλέγμα δευτέρας τάξης αποτελούμενα είτε από εξαεδρικά είτε από πρισματικά στοιχεία.



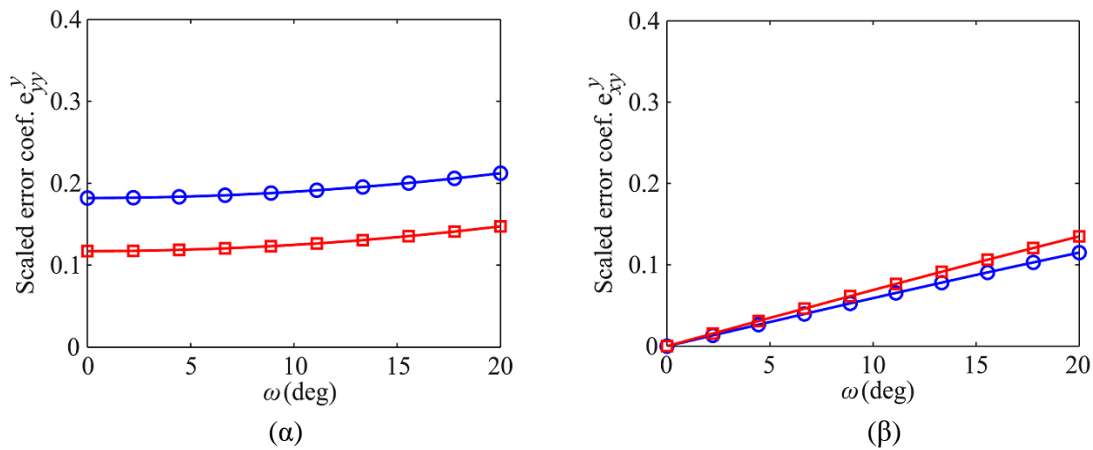
Σχήμα 9. Τοπικό πλέγμα δευτέρας τάξης παραμορφωμένο με (α) κάθετη επιμήκυνση κατά ποσοστιαία απόσταση  $s_n$ , (β) λοξότητα κατά γωνία  $\omega$ , και (γ) στρέψη κατά γωνία  $\epsilon$ .

Η ευαισθησία των πλεγμάτων στις παραμορφώσεις εκφράζεται από την κλίση της καμπύλης του συντελεστή σφάλματος. Στην περίπτωση της κάθετης επιμήκυνσης υπάρχει μόνο ένας μη-μηδενικός συντελεστής σφάλματος, ονομαστικά ο  $e_{yy}$  στην  $y$ -διεύθυνση. Τόσο τα πλέγματα δευτέρας τάξης όσο και τα αντίστοιχα πρώτης τάξης παρουσιάζουν την ίδια ευαισθησία στην κάθετη επιμήκυνση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10 για την περίπτωση εξαεδρικού τοπικού πλέγματος. Επίσης, παρατηρείται ότι υπάρχει μια κρίσιμη τιμή επιμήκυνσης ( $s_n \approx 0.3$ ) πάνω από την οποία το πλέγμα δευτέρας τάξης εμφανίζει μεγαλύτερο συντελεστή σφάλματος από το αντίστοιχο πρώτης τάξης. Οι κατανομές σφάλματος για τοπικά πρισματικά πλέγματα είναι παρόμοιες με αυτές των εξαέδρων.

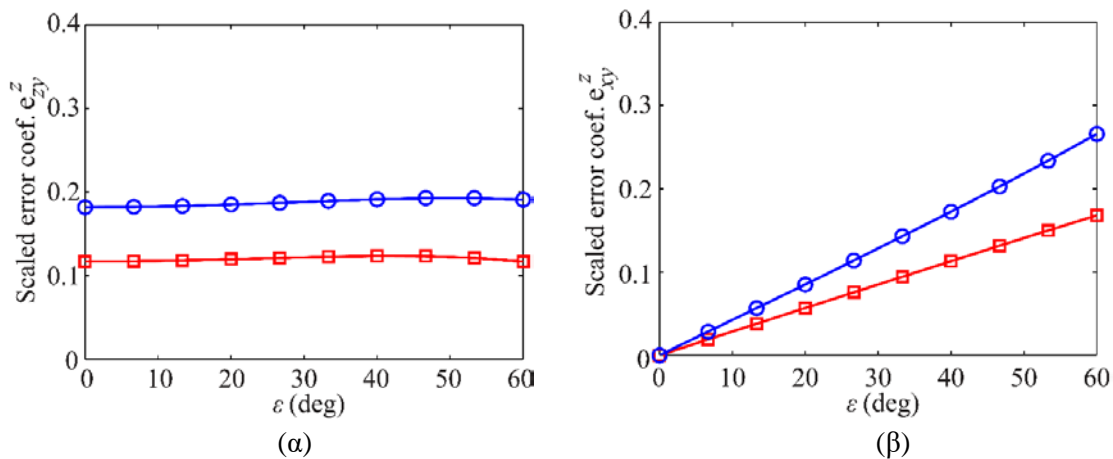


Σχήμα 10. Ευαισθησία εξαεδρικών πλεγμάτων πρώτης (○) και δευτέρας τάξης (□) στην παραμόρφωση κάθετης επιμήκυνσης. Ο εξεταζόμενος συντελεστής σφάλματος είναι ο  $e_{yy}^y$ .

Στις υπόλοιπες περιπτώσεις παρατηρείται πως κάποιοι συντελεστές σφάλματος εξαρτώνται κυρίως από τη γωνία καμπύλωσης και άλλοι από την παραμόρφωση που έχει επιβληθεί. Η μεταβολή των συντελεστών σφάλματος για πρισματικά πλέγματα παραμορφωμένα με λοξότητα και στρέψη φαίνονται στα Σχήματα 11 και 12, αντίστοιχα.



Σχήμα 11. Ευαισθησία πρισματικών πλεγμάτων πρώτης (○) και δευτέρας τάξης (□) στην παραμόρφωση λοξότητας. Οι εξεταζόμενοι συντελεστές σφάλματος είναι οι: (α)  $e_{yy}^y$ , και (β)  $e_{xy}^y$ .



Σχήμα 12. Ευαισθησία πρισματικών πλεγμάτων πρώτης (○) και δευτέρας τάξης (□) στην παραμόρφωση στρέψης. Οι εξεταζόμενοι συντελεστές σφάλματος είναι οι: (α)  $e_{zy}^z$ , και (β)  $e_{xy}^z$ .



Συμπερασματικά, τα πλέγματα δευτέρας τάξης δεν παρουσίασαν μεγαλύτερη ευαισθησία στις παραμορφώσεις από τα αντίστοιχα πρώτης τάξης, όπως φαίνεται στα Σχήματα 10, 11 και 12(α). Επιπλέον, για κάποιους συντελεστές σφάλματος τα πλέγματα δευτέρας τάξης παρουσίασαν μικρότερη ευαισθησία σε παραμορφώσεις από τα αντίστοιχα πρώτης τάξης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 12(β).

## 5. ΣΥΝΟΨΗ

Ειδικά διαμορφωμένα πλέγματα δευτέρας τάξης εξετάστηκαν ως προς την ακρίβεια. Για τη δημιουργία κατάλληλων δεικτών σφάλματος χρησιμοποιήθηκαν υπολογισμοί χωρικών παραγώγων της ταχύτητας σε αναλυτικά πεδία ροής καθώς και υπολογισμοί του όγκου κλειστών επιφανειών. Η σύγκριση των πλεγμάτων δευτέρας τάξης με τυπικά πλέγματα πρώτης τάξης έδειξε πως τα πλέγματα δευτέρας τάξης απαιτούν πολύ μικρότερο αριθμό υπολογιστικών στοιχείων για την επίτευξη υπολογισμών υψηλής ακρίβειας. Συγκεκριμένα, στις περιπτώσεις υπολογισμού της παραγώγου της ταχύτητας τα πλέγματα δευτέρας τάξης αποτελούνταν από 4-10 φορές λιγότερα υπολογιστικά στοιχεία από ότι τα αντίστοιχα πρώτης τάξης για να επιτύχουν περίπου την ίδια ακρίβεια, ενώ για τον υπολογισμό του όγκου τα πλέγματα δευτέρας τάξης ήταν μέχρι και 27 φορές πιο αραιά. Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν πως το υπολογιστικό κόστος μπορεί να μειωθεί σημαντικά με τη χρήση πλεγμάτων δευτέρας τάξης.

Επιπλέον, υπολογίστηκε η αναλυτική έκφραση του σφάλματος αποκοπής για πλέγματα δευτέρας τάξης και μελετήθηκε η ευαισθησία τοπικών πρισματικών και εξαεδρικών πλεγμάτων σε βασικές παραμορφώσεις. Τα πλέγματα δευτέρας τάξης αποδείχθηκαν λιγότερο ευαίσθητα στην καμπυλότητα της γεωμετρίας και στην παραμόρφωση τύπου “*torsion*” από τα αντίστοιχα πρώτης τάξης. Παρατηρήθηκε επίσης ότι πλέγματα πρώτης και δευτέρας τάξης έχουν περίπου την ίδια ευαισθησία στις παραμορφώσεις “*skewness*” και “*stretching*”.

## 6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Barth TJ, “Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for the Euler and Navier–Stokes equations”, in: VKI LS 1994-04: Lecture Series in CFD Course, VKI, Rhode Saint Genèse, Belgium, 1994.

Bassi F. and Rebay S. (1997), “A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations”, *Journal of Computational Physics* 131, p.267-279

Bassi F. and Rebay S. (1997), “High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Solution of the 2D Euler Equations”, *Journal of Computational Physics* 138, p.251–285.

Cockburn B., Karniadakis G.E. and Shu C.W., “Discontinuous Galerkin Methods”. in: *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Vol. 11. Springer: Berlin, Heidelberg, 2000, p.3-50.

Dey S., Shephard M.S. and Flaherty J.E. (1997), “Geometry representation issues associated with p-version Finite Element computations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 150, p.39-55.

Ekaterinaris J.A. (2005), “High-order accurate, low numerical diffusion methods for aerodynamics”, *Progress in Aerospace Sciences* 41 p.192-300.

Kallinderis Y., Karkoulas A. and Antonellis P., “Adaptive high-order hybrid grids for field Computations”, in: 8th Int. Congress on Computational Mechanics, Volos, Greece, 12-15 July 2015.

Karniadakis G.E. and Sherwin S.J., “Spectral/hp element methods for CFD”, New York, NY: Oxford University Press, 1999.

Korczak K.Z. and Patera A.T. (1986), “An isoparametric spectral element method for solution of the Navier-Stokes equations in complex geometry”, *Journal of Computational Physics* 62, p.361-382.

Leicht T, Kroll N, “Status of high-order methods for aerospace applications: achievements, weaknesses and perspectives”, in: Deconinck H, Abgrall R, eds. VKI LS 2014-03: 37th Advanced CFD Lecture Series: Recent developments in higher order methods and industrial application in aeronautics, VKI, Rhode Saint Genèse, Belgium, 2014, p.1-23.

Liu Y., Vinokur M. and Wang Z.J. (2006), “Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids: V. Extension to three-dimensional systems”, *Journal of Computational Physics* 212, p.454-472.

Luo X.-J., Shephard M.S. and Remacle J.-F., “The influence of geometric approximation on the accuracy of higher order methods”, in: 8th International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations; 2002.

Minyard T. and Kallinderis Y. (1995), “A hybrid spectral/finite volume method for viscous flows”, *International Journal of Computational Fluid Dynamics* 5(1-2), p.119-136.

Nastase C.R. and Mavriplis D.J. (2006), “High-order Discontinuous Galerkin methods using an hp-multigrid approach”, *Journal of Computational Physics* 213, p.330-357.

Nguyen N.C., Persson P.-O. and Peraire J., “RANS Solutions Using High Order Discontinuous Galerkin Methods”, in: 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, AIAA Paper 2007-914, 2007.

Ollivier-Gooch C. and Altena M.V. (2002), “A High-Order-Accurate Unstructured Mesh Finite-Volume Scheme for the Advection–Diffusion Equation”, *Journal of Computational Physics* 181, p.729-752.

Wang Z.J., Fidkowski K., Abgrall R. et al. (2013), “High-order CFD methods: current status and perspective”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 72, p.811-845.