

## ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΙ ΧΡΗΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΚΩΔΙΚΑ ΓΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΩΝ ΜΑΓΝΗΤΟΥΪΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΡΟΩΝ

Γεώργιος Π. Βαφάκος<sup>1</sup>, Πολύκαρπος Κ. Παπαδόπουλος<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Μεταπτυχιακός Φοιτητής, Τμήμα Μηχανολόγων & Αερον. Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών,  
giorgosvafakos@hotmail.com

<sup>2</sup>Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων & Αερον. Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών,  
p.papadopoulos@des.upatras.gr

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία αφορά την παρουσίαση και επαλήθευση υπολογιστικού κώδικα που προσομοιώνει χρονικά μεταβαλλόμενων, τρισδιάστατων μαγνητοϋδροδυναμικών ροών υγρών μετάλλων, σε εφαρμογές πυρηνικής σύντηξης. Με την μέθοδο των πεπερασμένων όγκων, ο υπολογιστικός κώδικας χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο CVP για την επίλυση των πλήρων εξισώσεων του μαγνητικού πεδίου. Ως πρώτο στάδιο εξέτασης των δυνατοτήτων του κώδικα, θα επιλυθούν οι περιπτώσεις ροής σε τετραγωνικής διατομής αγωγό για τις περιπτώσεις ηλεκτρικώς μονωμένων τοιχωμάτων (Shercliff's case), πλήρως αγωγίμων (Uflyand's case) και ανά δύο αγωγίμων (Hunt's case), για διάφορους αριθμούς Hartmann.

**Λέξεις Κλειδιά:** Μαγνητοϋδροδυναμική ροή, Μέθοδος CVP, πεπερασμένοι όγκοι, Shercliff, Uflyand, Hunt

### 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μαγνητοϋδροδυναμική (MHD) αφορά τη μελέτη ροής αγωγίμων ρευστών σε αγωγούς, υπό την επίδραση εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Η MHD έχει απασχολήσει σε μεγάλο βαθμό την επιστημονική κοινότητα λόγω της ευρείας εφαρμογής της σε τεχνολογικές εφαρμογές, μεταξύ των οποίων είναι η ψύξη θερμοπυρηνικών αντιδραστήρων σχάσης, η μαγνητοϋδροδυναμική πρόωση και η πολλά υποσχόμενη μέθοδος της μαγνητοϋδροδυναμικής μετατροπής ενέργειας σε αντιδραστήρες σύντηξης. Σε αντίθεση με την υπολογιστική ρευστοδυναμική, οι υπολογιστικοί κώδικες και αλγόριθμοι επίλυσης των εξισώσεων για την περίπτωση της μαγνητοϋδροδυναμικής είναι λίγοι και βρίσκονται ακόμα σε πρώιμο στάδιο. Για αυτό τον λόγο, μέχρι και σήμερα, στην βιβλιογραφία αναζητούνται νέες μέθοδοι και υπολογιστικά εργαλεία για την ορθή και αξιόπιστη αντιμετώπιση του προβλήματος.

Μια από τις πρώτες μελέτες του κλάδου της μαγνητοϋδροδυναμικής έγινε από τον Hartmann (Hartmann, 1937) ο οποίος μελέτησε αναλυτικά την μονοδιάστατη MHD ροή σε παράλληλες πλάκες, για μονωμένα και αγωγήμα τοιχώματα. Στην συνέχεια ακολούθησαν οι Shercliff (Shercliff, 1953) και Uflyand (Uflyand, 1961), που έλυσαν την μαγνητοϋδροδυναμική ροή εντός αγωγών ορθογωνικής διατομής, για πλήρως μονωμένα και πλήρως αγωγήμα τοιχώματα αντίστοιχα.

Τα βασικά προβλήματα σε χρήση MHD ροών σε εφαρμογές ψύξης είναι πως τα υλικά των ηλεκτρικά μονωμένων τοιχωμάτων είναι συνήθως και κακοί αγωγοί της θερμότητας, πράγμα που καθιστά την χρήση τους απαγορευτική για προβλήματα μετάδοσης θερμότητας. Αντίστοιχα, η χρήση αγωγών με πλήρως αγωγήμα τοιχώματα δημιουργεί γιγαντιαία πτώση πίεσης κατά μήκος του αγωγού, που συνεπάγεται σε μεγάλες απώλειες ενέργειας για την άντληση του ρευστού. Έτσι ο Hunt (Hunt and Stewartson, 1965), μελέτησε την ροή σε τετραγωνικούς αγωγούς με τις δυο επιφάνειες που βρίσκονται κάθετα στο

μαγνητικό πεδίο να είναι ηλεκτρικά αγωγίμες και τις άλλες δυο μονωμένες, κάτι που βελτίωσε τα προβλήματα πτώσης πίεσης και αύξησε τη μετάδοση θερμότητας.

Οι πρώτες υπολογιστικές εργασίες στην μαγνητοϋδροδυναμική άρχισαν με την μελέτη της 2D ροής υγρών μετάλλων σε αγωγό ορθογωνικής διατομής (Khan and Davidson, 1979) για χαμηλούς αριθμούς Hartmann. Για τις επόμενες δεκαετίες μέχρι και σήμερα πολυάριθμοι υπολογιστικοί κώδικες δημιουργήθηκαν για την ακριβή επίλυση των μαγνητοϋδροδυναμικών εξισώσεων. Αρχικά οι περισσότεροι κώδικες επικεντρώνονταν σε δισδιάστατες, πλήρως ανεπτυγμένες MHD ροές, λόγω του χαμηλού υπολογιστικού κόστους (Tillack et al. 1989, Sterl 1990, Araseki and Kotake 1994, Cuevas et al. 1997, Smolentsev 1999, Smolentsev et al. 2005, Bakalis and Hatzikonstantinou 2011). Οι περισσότερες από αυτές χρησιμοποιούν το μοντέλο του χαμηλού μαγνητικού Reynolds ( $\varphi$ -formulation), το οποίο χρησιμοποιώντας την παραδοχή πως δεν δημιουργείται επαγόμενο μαγνητικό πεδίο, δεν απαιτεί τη λύση των πλήρων εξισώσεων της μαγνητοϋδροδυναμικής ( $b$ -formulation). Την τελευταία δεκαετία, με την αύξηση της ισχύος των υπολογιστών, έχουν αρχίσει να αναπτύσσονται υπολογιστικοί κώδικες για την αντιμετώπιση τρισδιάστατων MHD προβλημάτων (Zhou et al. 2010, Zhou et al. 2011, Albets-Chico, et al. 2012, Mao and Pan, 2013). Χαρακτηριστικά αξίζει να αναφερθεί πως πρόσφατα έγινε μια προσπάθεια από μια ομάδα ερευνητών στο τομέα της μαγνητοϋδροδυναμικής (Smolentsev et al., 2015) για την συγκέντρωση βασικών προβλημάτων αναφοράς (benchmark problems) έτσι ώστε να γίνεται μια επαρκής και αξιόπιστη επαλήθευση των αλγορίθμων και υπολογιστικών πακέτων στον τομέα αυτόν.

Η παρούσα εργασία έχει ως σκοπό την δημιουργία ενός υπολογιστικού κώδικα ο οποίος θα μπορεί να λύσει χρονικά μεταβαλλόμενα τρισδιάστατα προβλήματα μαγνητοϋδροδυναμικής ροής εντός αγωγών, χωρίς την χρήση κάποιας προσέγγισης των εξισώσεων ή απλοποίησης των φυσικών νόμων ( $b$ -formulation). Για την ορθή επίλυση των MHD εξισώσεων χρησιμοποιήθηκε η μεθοδολογία CVP (Hatzikonstantinou and Sakalis 2004, Papadopoulos and Hatzikonstantinou 2011) που χρησιμοποιείται στην επίλυση ασυμπίεστων ρευστοδυναμικών ροών, εφαρμοσμένη στην επίλυση των εξισώσεων του μαγνητικού πεδίου πρώτη φορά από τους Bakalis et al. (Bakalis and Hatzikonstantinou, 2011) σε περιπτώσεις κυκλικής διατομής αγωγών. Η ακρίβεια και οι δυνατότητες του εν λόγω υπολογιστικού κώδικα επαληθεύτηκαν πάνω στις περιπτώσεις Hartmann (2D ροή), Shercliff, Uflyand και Hunt (3D ροές). Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της παρούσας δουλειάς με αναλυτικές λύσεις, επαληθεύεται η ακρίβεια αλγορίθμων που χρησιμοποιήθηκαν και οι ικανότητες του υπολογιστικού κώδικα.

## 2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

Η βασική διαφορά με τις ρευστοδυναμικές ροές είναι πως στην εξίσωση N-S πρέπει να εισαχθεί ο όρος της δύναμης Lorentz ως δύναμη πεδίου, ο οποίος για το πρόβλημα της μαγνητοϋδροδυναμικής αποδεικνύεται πως είναι  $\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$  όπου,  $\mathbf{J}$  είναι η πυκνότητα του επαγόμενου ρεύματος και  $\mathbf{B}$  το ολικό μαγνητικό πεδίο. Όλες οι εξισώσεις και τα μεγέθη που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία είναι σε αδιάστατη μορφή.

Στην παρούσα εργασία, οι εξισώσεις λύνονται στην αδιάστατη μορφή τους, χρησιμοποιώντας τις αδιάστατες μεταβλητές (τονισμένες) αντί για τις διαστατές μεταβλητές (μη-τονισμένες)

$$t' = \frac{t}{l/V_0} \quad \mathbf{V}' = \frac{\mathbf{V}}{V_0} \quad p' = \frac{p}{\rho V_0^2} \quad \mathbf{J}' = \frac{\mathbf{J}}{\sigma V_0 B_0} \quad \mathbf{B}' = \frac{\mathbf{B}}{B_0} \quad \nabla' = l \nabla$$

Αναλύοντας την δύναμη Lorentz στην εξίσωση N-S, χρησιμοποιώντας διάφορες διανυσματικές ταυτότητες, καταλήγουμε στην εξής αδιάστατη μορφή της εξίσωσης

$$\frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial t'} + (\mathbf{V}' \cdot \nabla') \mathbf{V}' = -\nabla' p' + \frac{1}{Re} \nabla'^2 \mathbf{V}' + \frac{Ha^2}{Re R_m} (\mathbf{B}' \cdot \nabla') \mathbf{B}' - \frac{Ha^2}{2 Re R_m} \nabla' (B'^2) \quad (1)$$

Για να υπολογιστεί το ολικό μαγνητικό πεδίο ( $\mathbf{B} = \mathbf{B}_o + \mathbf{B}_i$ ) συνδυάζονται οι εξισώσεις του Maxwell για την μαγνητοϋδροδυναμική σε μία αδιάστατη εξίσωση για το μαγνητικό πεδίο, η οποία είναι

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} + (\mathbf{V}' \cdot \nabla') \mathbf{B}' = \frac{1}{R_m} \nabla'^2 \mathbf{B}' + (\mathbf{B}' \cdot \nabla') \mathbf{V}' \quad (2)$$

όπου,  $Re = V_0 l / \nu$  ο αριθμός Reynolds,  $Ha = B_0 l \sqrt{\sigma / \rho \nu}$  ο αριθμός Hartmann,  $R_m = \mu \sigma V_0 l$  ο μαγνητικός αριθμός Reynolds,  $\mathbf{B}_i$  το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο,  $\mathbf{B}_o$  το εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο,  $\mathbf{V}_o$  και  $l$  η χαρακτηριστική ταχύτητα και μήκος αντίστοιχα,  $\mu$  η μαγνητική διαπερατότητα,  $\sigma$  η αγωγιμότητα του ρευστού,  $\nu$  το κινηματικό ιξώδες και  $\rho$  η πυκνότητα. Οι δύο τελευταίοι όροι της εξίσωσης Navier-Stokes συμβολίζουν την δύναμη Lorentz. Ο πρώτος εκ των δύο όρων ονομάζεται τάσεις Maxwell και ο δεύτερος είναι η βάρωση της μαγνητικής πίεσης. Τέλος, εκτός από την εξίσωση της συνέχειας, χρειάζεται να ικανοποιείται και η εξίσωση συνέχειας του μαγνητικού πεδίου

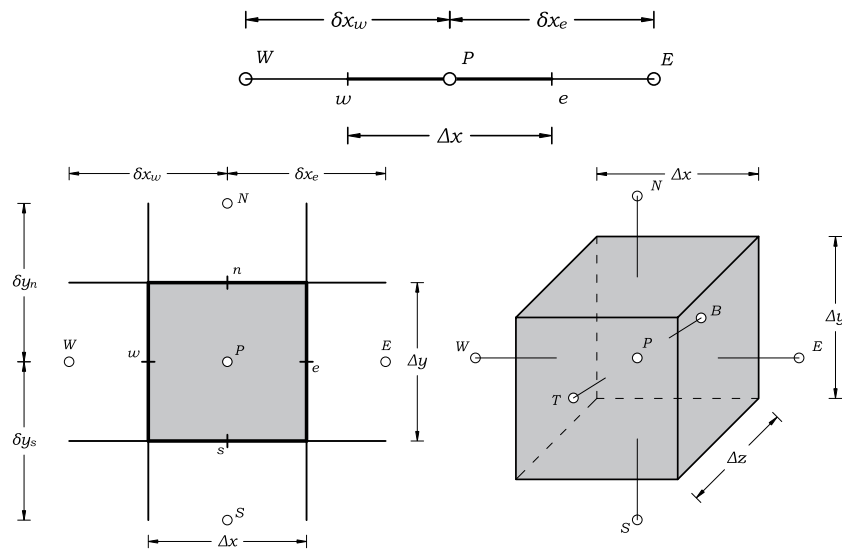
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (3)$$

Η ανάλυση των παραπάνω διανυσματικών εξισώσεων σε τρεις διαστάσεις, δημιουργεί ένα σύστημα 9 εξισώσεων οι οποίες πρέπει να λυθούν ταυτόχρονα, χρησιμοποιώντας κατάλληλους αλγόριθμους.

### 3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ

#### 3.1 Μέθοδος πεπερασμένων όγκων

Όλες οι εξισώσεις στον παρών κώδικα διακριτοποιούνται με την μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Για λόγους απλότητας έχει επιλεγεί το πλέγμα να είναι ομοιόθετο (collocated grid) με τις μεταβλητές να υπολογίζονται στο κέντρο του πεπερασμένου όγκου. Μια σχηματική απεικόνιση ενός μονοδιάστατου, δισδιάστατου και τρισδιάστατου όγκου ελέγχου φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Σχηματική απεικόνιση 1D, 2D και 3D πεπερασμένων όγκων ελέγχου

#### 3.2 Αλγόριθμοι για την επίλυση των εξισώσεων

Οι εξισώσεις μαγνητοϋδροδυναμικής μπορούν να χωριστούν σε δύο μέρη. Τις εξισώσεις ορμής και διατήρησης της μάζας, που αποτελούν τις ρευστοδυναμικές εξισώσεις, και τις εξισώσεις για το μαγνητικό πεδίο και για τη συνέχεια του μαγνητικού πεδίου, που αποτελούν τις μαγνητικές εξισώσεις.

Οι **εξισώσεις Navier-Stokes** επιλύονται με τον αλγόριθμο PISO (Issa, 1985), σύμφωνα με τον οποίο, όπως και στους περισσότερους αλγόριθμους ασυμπίεστης ροής, πρώτα επιλύεται η εξίσωση ορμής χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση της πίεσης, και στην συνέχεια χρησιμοποιώντας μια εξίσωση Poisson, υπολογίζεται μια προσέγγιση της πίεσης. Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση αυτή της πίεσης, υπολογίζεται μια καλύτερη προσέγγιση της ταχύτητας. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου η προσέγγιση της ταχύτητας ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας.

Όσον αφορά την επίλυση των **εξισώσεων του μαγνητικού πεδίου**, στον παρών κώδικα χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος CVP (Hatzikonstantinou and Sakalis, 2004) προσαρμοσμένος για την περίπτωση της μαγνητοϋδροδυναμικής (Bakalis and Hatzikonstantinou, 2011). Πρώτα γίνεται μία αρχική εκτίμηση του

μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{B}^*$ , η οποία δεν επαληθεύει την εξίσωση της συνέχειας ( $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ). Στην μέθοδο αυτή ορίζεται η διόρθωση του μαγνητικού πεδίου  $\delta\mathbf{B}$ , έτσι ώστε

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^* + \delta\mathbf{B} \quad (4)$$

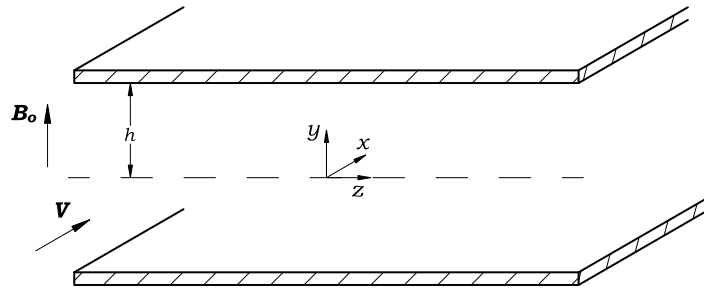
Στην συνέχεια υπολογίζεται η διόρθωση του μαγνητικού πεδίου, η οποία προκύπτει από την παρακάτω εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 \delta\mathbf{B} = \nabla G \quad (5)$$

όπου  $G = -\nabla \cdot \mathbf{B}^*$  και απαιτούμε  $\delta\mathbf{B} = 0$  ως συνοριακές συνθήκες στα τοιχώματα. Έτσι εισάγεται η παραπάνω τιμή  $\delta\mathbf{B}$  στην Εξίσωση 4 και υπολογίζεται η τιμή του μαγνητικού πεδίου που ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας.

#### 4. ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2D ΡΟΗΣ HARTMANN

Αρχικά εξετάζεται το δισδιάστατο πρόβλημα της μαγνητοϋδροδυναμικής ροής σε παράλληλες πλάκες, διαμέσου κάθετου σταθερού μαγνητικού πεδίου (ροή Hartmann). Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2, ρευστό εισέρχεται σε ημιάπειρες παράλληλες πλάκες, απόστασης  $2h$ , με ομοιόμορφη ταχύτητα  $V_0$ . Το σταθερό εξωτερικό μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}_0$  είναι κάθετο στις πλάκες. Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα για τις περιπτώσεις όπου οι πλάκες είναι είτε ηλεκτρικά μονωμένες είτε πλήρως αγωγιμες.



Σχήμα 2: Γεωμετρία του προβλήματος ροής Hartmann

Οι εξισώσεις επιλύθηκαν στην αδιάστατη μορφή τους (Εξισώσεις 1-3), κάτι που σημαίνει πως η αδιάστατη ταχύτητα εισόδου στον αγωγό θα είναι  $V' = 1$  και το αδιάστατο εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο  $B_0' = 1$ . Οι ταχύτητες στα τοιχώματα ορίζονται μηδενικές (συνθήκη μη ολίσθησης) όπως και η πίεση στην έξοδο του αγωγού. Οι οριακές συνθήκες της ταχύτητας στην έξοδο του αγωγού και της πίεσης στα τοιχώματα και στην είσοδο ορίζονται σαν συνθήκες Neumann με μηδενική παράγωγο. Οι τιμές των αριθμών Reynolds και μαγνητικού Reynolds διατηρήθηκαν σταθερές με  $Re = 100$  και  $R_m = 0.001$  αντίστοιχα, ενώ ο αριθμός Hartmann μεταβαλλόταν στο διάστημα  $Ha = 0 - 100$ , προκειμένου να μελετηθεί η συμπεριφορά του φυσικού προβλήματος αλλά και των αλγορίθμων με την μεταβολή του μαγνητικού πεδίου μόνο.

Όσον αφορά τις περιπτώσεις για ηλεκτρικά μονωμένα τοιχώματα και για πλήρως αγωγιμα, αυτό που ξεχωρίζει τις δυο περιπτώσεις υπολογιστικά, είναι οι οριακές συνθήκες του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου στα τοιχώματα του αγωγού. Στην περίπτωση των μονωμένων τοιχωμάτων έχουμε μηδενικό επαγόμενο μαγνητικό πεδίο πάνω στο τοίχωμα (συνθήκη Dirichlet) και στην περίπτωση των αγωγίων τοιχωμάτων η κάθετη παράγωγος του μαγνητικού πεδίου ορίζεται να είναι μηδέν (συνθήκη Neumann). Σε κάθε περίπτωση η διόρθωση του μαγνητικού πεδίου  $\delta\mathbf{B}$  ορίζεται μηδέν στα τοιχώματα.

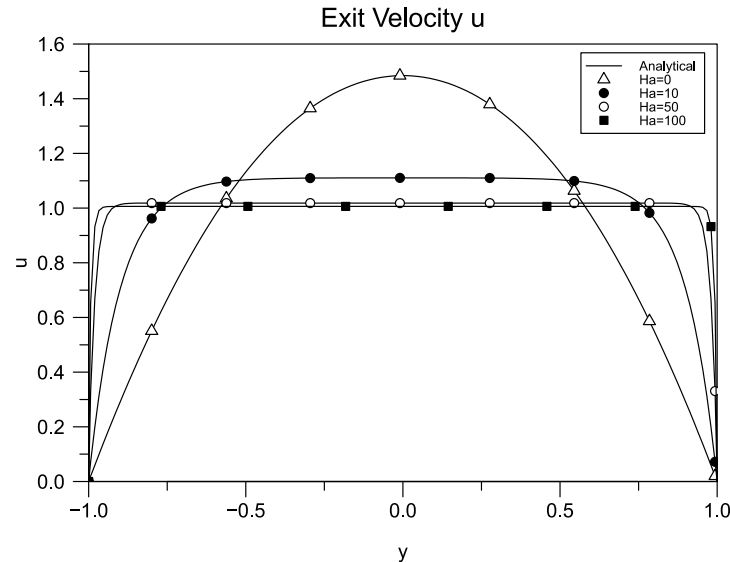
Το μη-ομοιόμορφο πλέγμα που κατασκευάστηκε σύμφωνα με μια μη γραμμική συνάρτηση πυκνώσης (Eiseman, 1979), έχει κατασκευαστεί έτσι ώστε να πυκνώνει προς τα τοιχώματα στην εγκάρσια διεύθυνση (πύκνωση διπλής κατεύθυνσης) και στην αξονική διεύθυνση προς την είσοδο του αγωγού (πύκνωση μονής κατεύθυνσης). Αυτό έχει επιλεγεί γιατί ακριβώς σε εκείνα τα σημεία υπεισέρχονται μεγάλες μεταβολές της ταχύτητας, και συνεπώς χρειάζεται μεγάλη τοπική πυκνώση για την αναπαράστασή της. Για την επιλογή του βέλτιστου πλέγματος επιλέχθηκαν 3 συγκεκριμένες μεταβλητές, η ταχύτητα στο κέντρο της διατομής  $V_c$ , η πίεση στο κέντρο του αγωγού  $p_{center}$  και η μέγιστη τιμή του

επαγόμενου μαγνητικού πεδίου  $B_{ix}$  στην έξοδο του αγωγού. Ως βέλτιστο πλέγμα επιλέχθηκε αυτό με διαστάσεις  $120 \times 120$  κελιά, επειδή οι μεταβλητές αυτές στο εν λόγω πλέγμα διαφέρουν κατά ποσοστό μικρότερο από 0.1% από το πιο πυκνό πλέγμα που εξετάστηκε ( $144 \times 144$ ).

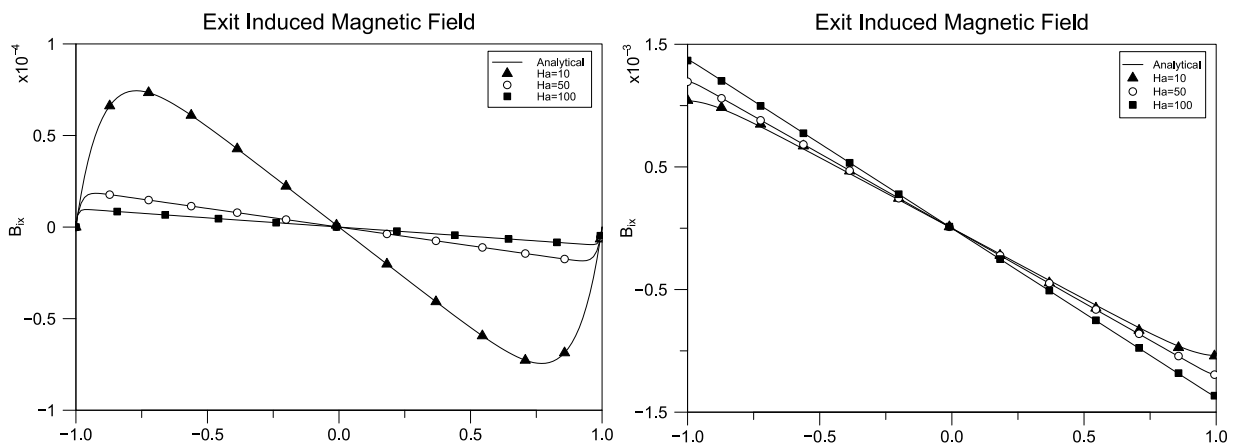
Πίνακας 1: Οι τιμές διάφορων μεταβλητών για κάθε ένα πλέγμα που εξετάστηκε

Πλέγμα	Ποσοστιαία Μεταβολή %		
	$V_c$	$\rho_{center}$	$B_{ix_{max}}$
<b>70 × 70</b>	0.9	0.2	15.3
<b>84 × 84</b>	0.6	0.1	1.5
<b>100 × 100</b>	0.3	0.0	0.5
<b>120 × 120</b>	0.1	0.0	0.1
<b>144 × 144</b>	-	-	-

Στο Σχήμα 3 φαίνεται η κατανομή της ταχύτητας στο στην έξοδο του αγωγού για διαφορετικούς αριθμούς Hartmann. Η λύση παραμένει ίδια είτε πρόκειται για αγώγιμα τοιχώματα είτε για αγώγιμα. Όπως ήταν αναμενόμενο και από την βιβλιογραφία καθώς αυξάνεται ο αριθμός Hartmann και η επίδραση του μαγνητικού πεδίου στην ροή γίνεται ακόμα πιο έντονη, το προφίλ της ταχύτητας από παραβολικό γίνεται επίπεδο στο κέντρο και τα οριακά στρώματα γίνονται πολύ λεπτά. Η ταχύτητα συγκρίνεται επίσης με την αναλυτική λύση με απόλυτη συμφωνία.



Σχήμα 3: Προφίλ ταχύτητας στην έξοδο του αγωγού



Σχήμα 4: Το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο  $B_{ix}$  στην έξοδο για μονωμένα τοιχώματα (αριστερά) και πλήρως αγώγιμων (δεξιά)

Στο Σχήμα 4 παρουσιάζεται το μαγνητικό πεδίο  $B_{ix}$  στην έξοδο του αγωγού, συγκρινόμενο με την αναλυτική λύση του προβλήματος. Φαίνεται από τα διαγράμματα πως στην περίπτωση των μονωμένων τοιχωμάτων, το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο μειώνεται με την αύξηση του Hartmann, σε αντίθεση με την περίπτωση των αγώγιμων τοιχωμάτων που αυξάνεται με τον αριθμό  $Ha$ .

Πίνακας 2: Η βάρθρωση της πίεσης και η ποσοστιαία μεταβολή της για μονωμένα και αγώγιμα τοιχώματα

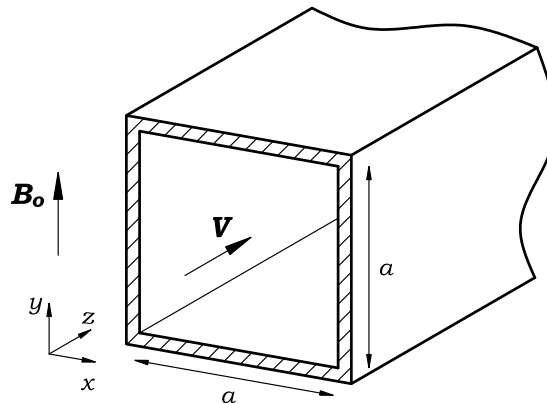
Hartmann	Μονωμένα Τοιχώματα		Αγώγιμα Τοιχώματα	
	$dp/dx$	%	$dp/dx$	%
0	-0.0392	-	-0.0392	-
10	-0.1111	283.4	-1.154	2942.9
50	-0.5092	1299.0	-30.47	77729.6
100	-1.0061	2566.6	-138.28	352761.7

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζεται η πτώση πίεσης στην αξονική διεύθυνση του αγωγού. Είναι φανερό πως με την αύξηση του αριθμού Hartmann η πτώση πίεσης αυξάνεται σε μεγάλο βαθμό. Παρόλα αυτά, η αύξηση της πτώσης πίεσης στον αγωγό με τα αγώγιμα τοιχώματα είναι ακόμα μεγαλύτερη από ότι αυτή του αγωγού με τα μονωμένα. Χαρακτηριστικά αναφέρεται πως για την περίπτωση του  $Ha = 100$  η βάρθρωση της πίεσης στην περίπτωση των αγώγιμων τοιχωμάτων παρουσίασε αύξηση της τάξης του 350000 %.

## 5. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ 3D ΡΟΩΝ

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της τρισδιάστατης ροής υγρού μετάλλου σε αγωγό τετραγωνικής διατομής. Οι τρεις διάσημες περιπτώσεις που εξετάζονται είναι η περίπτωση **Shercliff** όπου τα τοιχώματα είναι πλήρως μονωμένα, η περίπτωση **Uflyand** όπου τα τοιχώματα είναι πλήρως αγώγιμα και η περίπτωση **Hunt** όπου τα τοιχώματα κάθετα στο μαγνητικό πεδίο είναι πλήρως αγώγιμα και τα τοιχώματα παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο είναι μονωμένα.

Και στις τρεις περιπτώσεις, όπως και στην δισδιάστατη ροή Hartmann, έχουμε ομοιόμορφη ροή ρευστού στην είσοδο του αγωγού με ταχύτητα  $V_0$ . Οι συνθήκες πίεσης και ταχύτητας στα τοιχώματα και στην έξοδο είναι ίδιες με της Παραγράφου 4. Οι τιμές των αδιάστατων αριθμών που έχουν επιλεγεί για το πρόβλημα είναι  $Re = 100$ ,  $R_m = 0.001$  και  $Ha = 0, 5, 10, 30$  και 50.

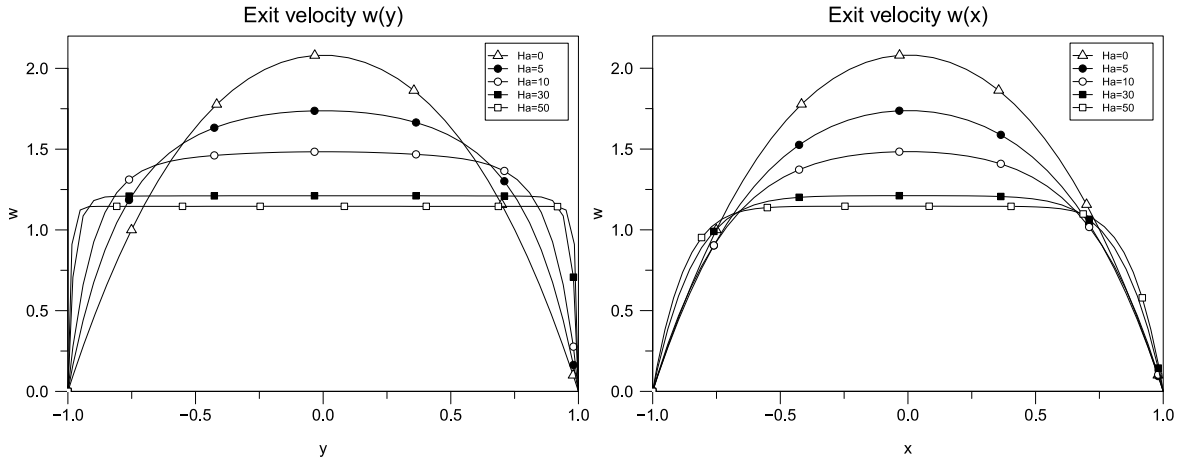


Σχήμα 5: Γεωμετρία του τρισδιάστατου αγωγού

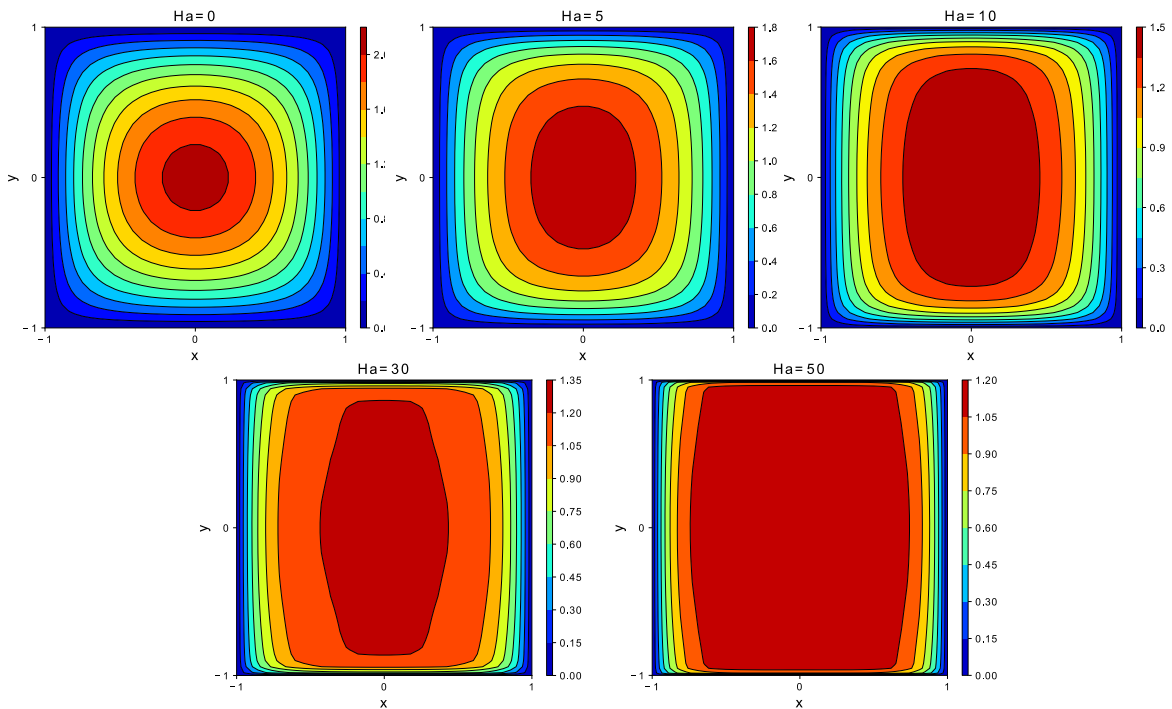
### 5.1 Περίπτωση Shercliff

Στην περίπτωση Shercliff οι οριακές συνθήκες του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου στα τοιχώματα είναι σταθερές και ίσες με το μηδέν. Αυτό ορίζεται επειδή δεν υπάρχει διαρροή ηλεκτρικού ρεύματος δια μέσου των μονωμένων τοιχωμάτων οπότε και δεν υπάρχει παραγωγή επαγόμενου μαγνητικού πεδίου (νόμος Ampère). Το βέλτιστο πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για την αναπαράσταση της ροής είναι το  $44 \times 44 \times 120$ . Η επιλογή έγινε με παρόμοια κριτήρια με το πλέγμα της δισδιάστατης ροής Hartmann.

Στα Σχήμα 6 φαίνεται η ταχύτητα στην έξοδο του αγωγού για διάφορους αριθμούς Hartmann. Τα αποτελέσματα συμφωνούν με την βιβλιογραφία αφού στην διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου τα οριακά στρώματα (στρώματα Hartmann) γίνονται πολύ λεπτά σε σχέση με τα ρευστοδυναμικά οριακά στρώματα. Τα οριακά στρώματα στην διεύθυνση κάθετη του μαγνητικού πεδίου ονομάζονται στρώματα Shercliff.



Σχήμα 7: Προφίλ ταχύτητας εξόδου στην διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου (αριστερά) και στη κάθετη διεύθυνση (δεξιά)

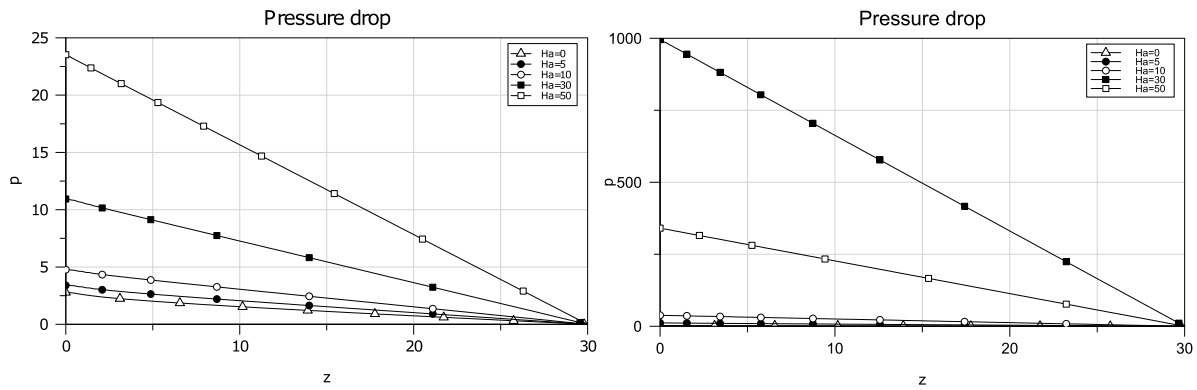


Σχήμα 6: Διαγράμματα ταχύτητας εξόδου του αγωγού για διάφορους αριθμούς Hartmann για την περίπτωση Shercliff

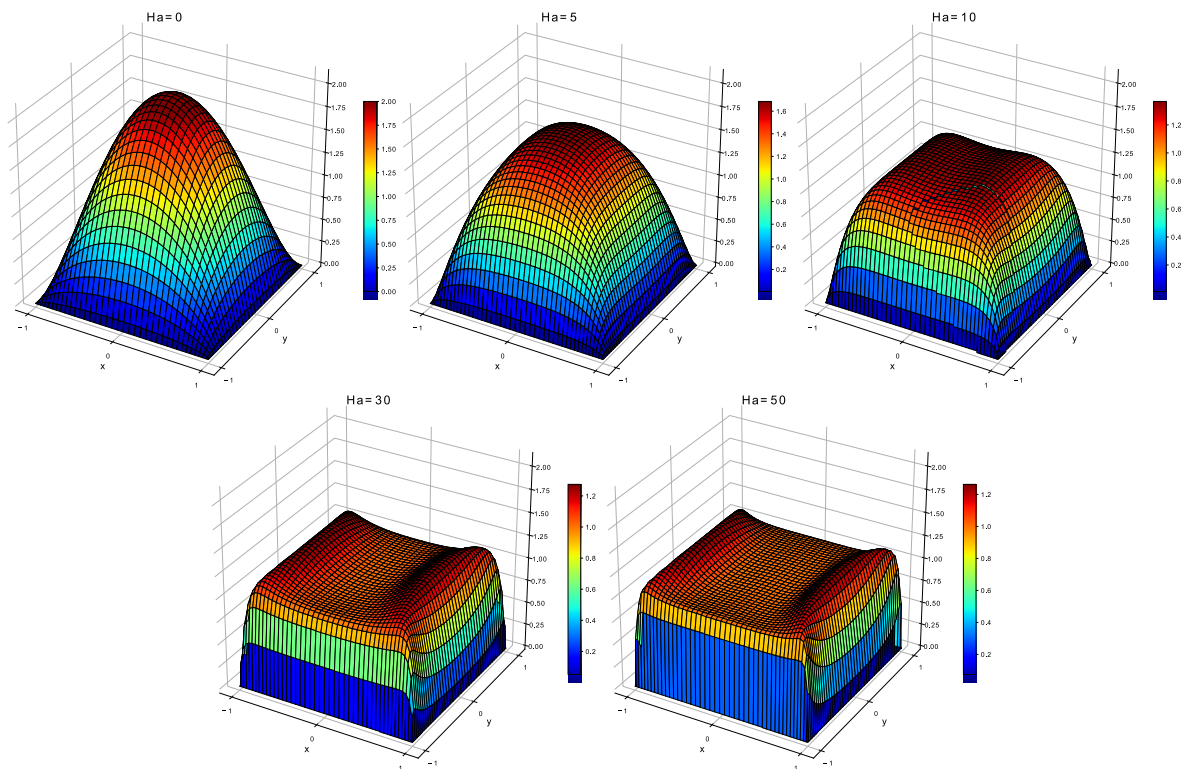
## 5.2 Περίπτωση Uflyand

Αντίθετα με την περίπτωση Shercliff, στην περίπτωση Uflyand τα τοιχώματα είναι πλήρως αγωγίμα πράγμα που σημαίνει πως διαρρέονται πλήρως από ηλεκτρικό ρεύμα. Για αυτό τον λόγο οι οριακές συνθήκες που επιλέχθηκαν για το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο είναι συνθήκες τύπου Neumann, με μηδενική παράγωγο. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται αρχικά η πτώση πίεσης για τις περιπτώσεις Shercliff και Uflyand. Όπως και στην περίπτωση της ροής Hartmann, έτσι και στην περίπτωση του τρισδιάστατου αγωγού η ύπαρξη των αγωγίμων τοιχωμάτων αυξάνει κατά εξαιρετικά μεγάλο βαθμό την πτώση πίεσης.





Σχήμα 8: Πτώση πίεσης κατά μήκος του αγωγού για την περίπτωση Shercliff (αριστερά) και Uflyand (δεξιά)



Σχήμα 9: Διαγράμματα ταχύτητας εξόδου του αγωγού για διάφορους αριθμούς Hartmann για την περίπτωση Uflyand

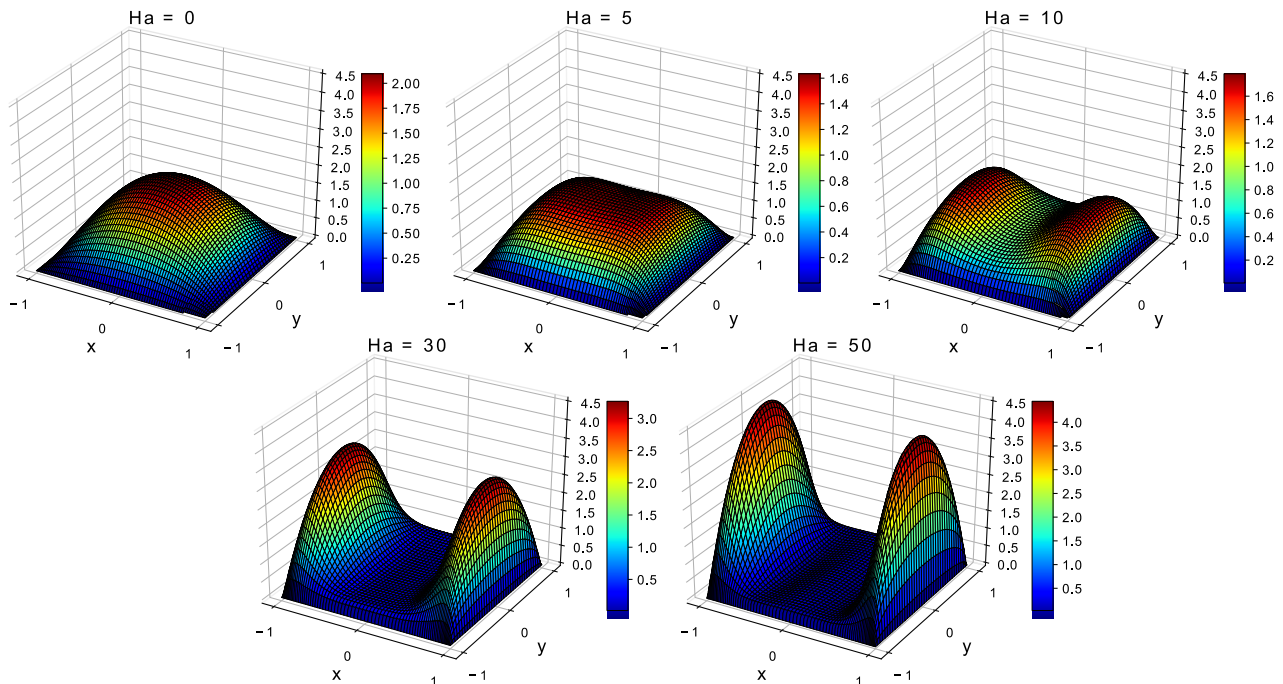
Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται πως το προφίλ ταχύτητας στην έξοδο του αγωγού είναι αρκετά διαφορετικό σε σχέση με την περίπτωση των μονωμένων τοιχωμάτων. Πιο συγκεκριμένα, κοντά στα τοιχώματα Shercliff (τα τοιχώματα παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο) με την αύξηση του αριθμού Hartmann (για  $Ha > 10$ ) εμφανίζονται δυο συμμετρικά jet ταχύτητας, τα οποία ξεπερνάνε σε τιμή την ταχύτητα του πυρήνα.

### 5.3 Περίπτωση Hunt

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, προκειμένου να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα της μεγάλης πτώσης και μετάδοσης θερμότητας, ο Hunt πρότεινε την περίπτωση όπου τα τοιχώματα που είναι κάθετα στο εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο είναι πλήρως αγωγίμα και τα άλλα δύο είναι μονωμένα. Στο Σχήμα 10 μπορεί να δει κανείς την συμπεριφορά της ταχύτητας στην έξοδο του αγωγού, όπου η ροή είναι πλήρως ανεπτυγμένη. Παρόμοια με την περίπτωση όπου όλα τα τοιχώματα του αγωγού είναι αγωγίμα, έτσι και εδώ κοντά στα τοιχώματα, παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο (τοιχώματα Shercliff) εμφανίζονται 2 jet υψηλής ταχύτητας. Αυτό που διαφέρει στην περίπτωση Hunt είναι πως η τιμή της ταχύτητας στα jet αυτά είναι πολύ υψηλότερη της μέσης ταχύτητας, όπως για παράδειγμα για  $Ha = 50$  όπου είναι



περίπου 4.5 φορές υψηλότερη η ταχύτητα από την μέση. Η ταχύτητα στο κέντρο του αγωγού παραμένει σχετικά χαμηλή. Σε κάθε περίπτωση τα οριακά στρώματα θα είναι πολύ μικρά, όπως υπολογίστηκαν στην ροή Hartmann.



Σχήμα 10: Διαγράμματα ταχύτητας εξόδου του αγωγού για διάφορους αριθμούς Hartmann για την περίπτωση Hunt

## 6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκε ένας υπολογιστικός κώδικας στοχευμένος στην επίλυση της μαγνητοϋδροδυναμικής ροής υγρών μετάλλων σε προβλήματα πυρηνικής σύντηξης. Βασικός στόχος ήταν μια πρώτη εκτίμηση των δυνατοτήτων του, μέσω της επίλυσης των προβλημάτων δισδιάστατης ροής (ροή Hartmann) και τρισδιάστατης ροής (περιπτώσεις Shercliff, Uflyand και Hunt). Η σύγκριση με αναλυτικές λύσεις και με αποτελέσματα βιβλιογραφίας, είχε ως συμπέρασμα πως ο υπολογιστικός κώδικας και ο αλγόριθμος CVP είναι αρκετά ακριβείς για τις παρούσες βασικές εφαρμογές της μαγνητοϋδροδυναμικής.

Η επεξεργασία των αποτελεσμάτων έδειξε πως η αύξηση του αριθμού Hartmann έχει σημαντική επίδραση στην κατανομή της ταχύτητας του ρευστού στην διατομή του αγωγού και στην πτώση πίεσης. Στην κατανομή της αξονικής ταχύτητας εμφανίζονται λεπτά στρώματα Hartmann στα πλευρικά τοιχώματα και ισχυρά jet ταχυτήτων δεξιά και αριστερά του πυρήνα της ροής και κοντά σε αυτόν, λόγω της επίδρασης της δύναμης Lorentz. Επιπλέον, η αύξηση του αριθμού Hartmann οδηγεί σε μεγαλύτερη πτώση πίεσης εντός του αγωγού. Αυτό συμβαίνει επειδή στην εξίσωση Navier-Stokes υπεισέρχεται ο όρος της δύναμης Lorentz, ο οποίος αυξάνεται με την αύξηση του  $Ha$ . Καθώς αυξάνεται ο όρος αυτός, αυξάνεται ανάλογα και ο όρος της βάρθρωσης της πίεσης για να εξισορροπήσει την επίδραση της δύναμης Lorentz πάνω στο ρευστό, η οποία ασκείται αντίρροπα στην ροή του ρευστού και τείνει να το επιβραδύνει. Έτσι η βάρθρωση της πίεσης αυξάνεται για να διατηρηθεί σταθερή η παροχή του ρευστού, κάτι που αντιστοιχεί σε πτώση πίεσης στην διεύθυνση της ροής.

Η διαφορά στις τρεις περιπτώσεις 3D ροής έγκειται στην τιμή της πτώσης πίεσης (ανεξάρτητα με την πτώση πίεσης που υπεισέρχεται λόγω της αύξησης του  $Ha$ ), και στην μορφή των πλευρικών οριακών στρωμάτων. Όπως έχει ήδη αναλυθεί στην βιβλιογραφία και βρέθηκε στα πλαίσια αυτής της μελέτης, στη περίπτωση Uflyand η πτώση πίεσης είναι απαγορευτικά μεγάλη σε σχέση με την περίπτωση Shercliff, πράγμα που οδήγησε την διερεύνηση της περίπτωσης Hunt για την βελτίωση της μετάδοσης θερμότητας στον αγωγό. Όσον αφορά τα οριακά στρώματα, ο λόγος για τον οποίο τα οριακά στρώματα είναι τόσο μικρά στις μαγνητοϋδροδυναμικές ροές είναι γιατί η δύναμη Lorentz είναι η κυριαρχούσα δύναμη στον αγωγό, και μόνο πάρα πολύ κοντά στα τοιχώματα (όπου οι μεταβολές της ταχύτητας είναι

πολύ έντονες) μπορούν οι δυνάμεις τριβής να αντισταθμίσουν την Lorentz και να δημιουργήσουν οριακά στρώματα. Παρόλα αυτά, το φαινόμενο αυτό οξύνεται στην περίπτωση Uflyand και ακόμα πιο πολύ στην περίπτωση Hunt, όπου οι μαγνητικές τάσεις είναι τόσο έντονες όπου στο σημείο που η δύναμη Lorentz θα εξισωνόταν με την δύναμη τριβής και κανονικά εκεί θα άρχιζε το οριακό στρώμα, η ροή παρουσιάζει μια αστάθεια και δημιουργούνται δυο jet ταχύτητας παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο όπως φαίνεται στα αντίστοιχα διαγράμματα. Αυτό το φαινόμενο συμβαίνει προκειμένου να υπάρχει μια σταθερή παροχή ρευστού σε όλο το μήκος του αγωγού (ασυμπίεστη ροή).

## ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Albets-Chico, X., Radhakrishnan, H. and Kassinos, S. C. (2012) 'Full magnetohydrodynamic solution of liquid-metal flow in an insulating pipe subjected to a strong fringing magnetic field', *Fusion Science and Technology*, 61(1), pp. 1–10. doi: 10.13182/FST12-A13335.
- Araseki, H. and Kotake, S. (1994) 'A Self-Correcting Procedure for COmputational Liquid Metal Magnetohydrodynamics', *Journal of Computational Physics*, (110), pp. 301–309.
- Bakalis, P. a. and Hatzikonstantinou, P. M. (2011) 'MHD and Thermal Flow Between Isothermal Vertical Concentric Cylinders with the Rotation of the Inner Cylinder', *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 59(11), pp. 836–856. doi: 10.1080/10407782.2011.578013.
- Cuevas, S. *et al.* (1997) 'Liquid-metal MHD flow in rectangular ducts with thin conducting or insulating walls: laminar and turbulent solutions', *International Journal of Engineering Science*, 35(5), pp. 485–503. doi: 10.1016/S0020-7225(96)00126-7.
- Eiseman, P. R. (1979) 'A multi-surface method of coordinate generation', *Journal of Computational Physics*, 33(1), pp. 118–150. doi: 10.1016/0021-9991(79)90031-7.
- Hartmann, J. (1937) *Theory of Laminar Flow of an Electrically Conductive Liquid in a Homogeneous Magnetic Field*. Munksgaard (Hg-Dynamics). Available at: <https://books.google.gr/books?id=U3NbMQAACAAJ>.
- Hatzikonstantinou, P. M. and Sakalis, V. D. (2004) 'A numerical-variational procedure for laminar flow in curved square ducts', *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 45(12), pp. 1269–1289. doi: 10.1002/flid.596.
- Hunt, J. and Stewartson, K. (1965) 'Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts. II', *Journal of fluid mechanics*, 23, p. 563. Available at: [http://journals.cambridge.org/abstract\\_S0022112065001544](http://journals.cambridge.org/abstract_S0022112065001544).
- Issa, R. (1985) 'Solution of the Implicitly Discretized Fluid Flow Equations by Operator-Splitting', *Journal of Computational Physics*, 62, pp. 40–65.
- Khan, S. and Davidson, J. N. (1979) 'Magnetohydrodynamic Coolant Flows in Fusion Reactor Blankets', *Ann. of Nuclear Energy*, 6, pp. 499–509.
- Mao, J. and Pan, H. (2013) 'Three-dimensional numerical simulation for magnetohydrodynamic duct flows in a staggered grid system', *Fusion Engineering and Design*. Elsevier B.V., 88(3), pp. 145–150. doi: 10.1016/j.fusengdes.2013.01.092.
- Papadopoulos, P. K. and Hatzikonstantinou, P. M. (2011) 'Improved CVP scheme for laminar incompressible flows', *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 66(February 2010), pp. 1115–1132. doi: 10.1002/flid.
- Shercliff, J. A. (1953) 'Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields', *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 49(1), pp. 136–144. doi: 10.1017/S0305004100028139.
- Smolentsev, S. *et al.* (2015) 'An approach to verification and validation of MHD codes for fusion applications', *Fusion Engineering and Design*, 100, pp. 65–72. doi: 10.1016/j.fusengdes.2014.04.049.
- Smolentsev, S., Morley, N. and Abdou, M. (2005) 'Code development for analysis of MHD pressure drop reduction in a liquid metal blanket using insulation technique based on a fully developed flow model', *Fusion Engineering and Design*, 73(1), pp. 83–93. doi: 10.1016/j.fusengdes.2005.01.003.
- Smolentsev, S. Y. (1999) 'Mathematical models for magnetohydrodynamic-flows in a fusion reactor blanket', *Plasma Devices and Operations*, 7(3), pp. 231–241. doi: 10.1080/10519999908228781.
- Sterl, A. (1990) 'Numerical simulation of liquid-metal MHD flows in rectangular ducts', *Journal of Fluid Mechanics*, 216(1), p. 161. doi: 10.1017/S0022112090000386.
- Tillack, M. S., Ying, A. and Hashizume, H. (1989) 'The Effect of Magnetic Field Alignment on Heat Transfer in Liquid Metal Blanket Channels', *Proceedings of IEEE Thirteenth Symposium on Fusion Engineering*, pp. 376–379. doi: <https://doi.org/10.1109/FUSION.1989.102243>.
- Uflyand, Y. S. (1961) 'Hartman problem for a circular tube', *Soviet Physics Technical Physics*, 5, pp. 1194–1196.
- Zhou, T. *et al.* (2010) 'Code development and validation for analyzing liquid metal MHD flow in rectangular

ducts', *Fusion Engineering and Design*. Elsevier B.V., 85(10–12), pp. 1736–1741. doi: 10.1016/j.fusengdes.2010.05.034.

Zhou, T., Chen, H. and Yang, Z. (2011) 'Effect of fringing magnetic field on magnetohydrodynamic flow in rectangular duct', *Fusion Engineering and Design*. Elsevier B.V., 86(9–11), pp. 2352–2357. doi: 10.1016/j.fusengdes.2011.03.045.

## **CONSTRUCTION AND VALIDATION OF NUMERICAL CODE FOR THE INVESTIGATION OF INCOMPRESSIBLE MAGNETOHYDRODYNAMIC FLOWS**

The aim of the present paper is the presentation and validation of a numerical code that aims in solving the case of time-dependent, 3D magnetohydrodynamic flow of liquid metals, in fusion applications. Discretizing the equations with the finite volume method, the numerical code uses the CVP algorithm for the solution of the full set of the MHD equations. A first take in validating the numerical code and testing its capabilities is going to be presented, by analyzing the case of the 2D Hartmann flow in parallel plates, and the cases of the 3D flow in a rectangular pipe with fully insulated walls (Shercliff's case), electrically conducting walls (Uflyand's case) and with two insulated and two fully conducting walls (Hunt's case), for various Hartmann numbers. It can be seen throughout the present work that the numerical results obtained with the numerical code are a perfect match with analytical solutions and literature results.